UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Departamento de Física de la Tierra, Astronomia y Astrofisica

TESIS DOCTORAL

Análisis de los problemas de contorno de frontera libre de la Geodesía física

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Jesús Otero Juez

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica

ANALISIS DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO DE FRONTERA LIBRE DE LA GEODESIA FISICA

Jesús Otero Juez

Madrid, 1988

Colección Tesis Doctorales. N.º 336/1988

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 - 28015 Madrid
Madrid, 1988
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-22907-1988

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE FISICA DE LA TIERRA, ASTRONOMIA Y ASTROFISICA

SECCION DEPARTAMENTAL DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

ANALISIS DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO DE FRONTERA LIBRE DE LA GEODESIA FISICA

Director: Miguel J. Sevilla,
Catedrático de Astronomía y Geodesia
de la Universidad
Complutense.

Memoria que presenta
Jesús Otero Juez para optar
al Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas.

Madrid, 1987

A Raquel, mi esposa.

Aprovecho esta ocasión para expresar mi sincera gratitud a todas aquellas personas que, dentro y fuera de esta Facultad, me han ayudado en la realización de este trabajo. En particular, deseo mencionar,

a D. Miguel J. Sevilla, que ha dirigido este trabajo y me inició en el estudio de la Geodesia,

a D. Fernando Sansò, Profesor del Instituto de Topografía, Fotogrametría y Geofísica del Politécnico de Milán, que revisó el manuscrito y me hizo interesantes sugerencias,

a D. Lorenzo García, que ha puesto su tiempo a mi disposición en tantas ocasiones, por su ayuda y buenos consejos en los momentos difíciles,

a los profesores y becarios de este Departamento, que continuamente se han interesado por la marcha de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCION

El objeto de esta memoria es el análisis de los problemas de contorno de frontera libre que se plantean en Geodesia. En términos poco concretos, el problema es la determinación de la superficie física de la Tierra (así como su campo de gravedad exterior) a partir de ciertas observaciones realizadas sobre ella.

Sin ánimo de presentar aquí un estudio histórico de la evolución de este tipo de problemas, es claro el interés desde hace ya más de cien años por la posibilidad de determinar la figura de la Tierra a partir del conocimiento sobre su superficie de cantidades relacionadas con su campo gravífico, como por ejemplo la gravedad. En este aspecto, el conocido teorema que Clairaut estableció en 1738 (Heiskanen y Moritz, 1985, pag. 69) y según el cual el aplanamiento de la Tierra puede obtenerse a partir de medidas de la gravedad, puede considerarse pionero en algo que es característico y original de la Geodesia Física: la estrecha relación entre cantidades geométricas y cantidades físicas. Los posteriores trabajos de G.G.Stokes (1849) y M.S.Molodensky (1945) constituyen la base sobre la cual se apoya la teoría moderna de los problemas de contorno de la Geodesia Física.

En nuestro trabajo prestaremos especial atención a los denominados problema de Molodensky vectorial y problema de Molodensky escalar. En el primero, formulado rigurosamente en (Krarup, 1973), los datos de contorno son el potencial gravífico y el vector gravedad siendo la incógnita el vector de posición de cada uno de los puntos sobre la superficie terrestre; en el segundo, introducido en (Sacerdote y Sansò, 1985), conocidos sobre la superficie terrestre el potencial gravífico, el módulo del vector gravedad y las coordenadas planimétricas con respecto a un elipsoide de referencia, se quiere determinar la altitud elipsoídica de cada uno de los puntos sobre la superficie terrestre.

En ambos problemas consideraremos la situación ideal de un recubrimiento continuo de datos de la superficie, correspondiendo al concepto usual de problemas de contorno en Matemática Aplicada.

De los dos problemas presentados, el problema vectorial ha sido objeto de un mayor estudio en los últimos quince años. Los resultados teóricos sobre la existencia y unicidad de solución del llamado problema no lineal, han sido obtenidos esencialmente de dos maneras. En (Hörmander, 1976), después de una adecuada formulación funcional del problema, se aplica un teorema de la función implícita de tipo Nash-Moser debido a la "pérdida de derivadas" en un esquema de aproximaciones sucesivas construido a partir de las ecuaciones linealizadas. En (Sansò, 1977; 1978; 1979), por medio de una transformación de Legendre, se reduce el estudio del problema a la resolución de un problema de contorno no lineal en el espacio de la gravedad. Es necesario mencionar también los recientes resultados obtenidos en (Witsch, 1980; 1985; 1986).

Por lo que respecta al problema escalar, el único resultado actualmente disponible ha sido establecido en (Sacerdote y Sansò, 1986) con métodos análogos (adaptados a los datos de contorno de este problema) a los utilizados en el estudio del problema vectorial en el espacio de la gravedad. En este trabajo mencionado se supone un modelo de Tierra sin rotación (algo necesario también si se trabaja en el espacio de la gravedad) y se garantiza la existencia de una única solución en un adecuado entorno del caso esférico. Uno de los aspectos fundamentales de este problema es el hecho de que las ecuaciones linealizadas nos conducen a la conocida y clásica "ecuación fundamental de la Geodesia Física" (Heiskanen y Moritz, 1985, Cap. 2) y es por este motivo por lo que en un principio a este problema se le denominó el "verdadero problema de contorno de la Geodesia Física clásica" (Sacerdote y Sansò, 1985).

Tanto en el problema vectorial como en el escalar, coincide el aspecto funcional de los correspondientes problemas lineales en aproximación esférica del potencial de referencia, resultando el denominado <u>problema simple de Molodensky</u>. Este problema de contorno es, desde el punto de vista práctico, el que ha sido objeto de una mayor atención en la literatura. En (Moritz, 1980) se recoge la principal investigación sobre las series-solución de Molodensky, Brovar, y otros, su convergencia y equivalencia. Junto al interés práctico de evaluar el potencial perturbador, últimamente se ha llevado a cabo un importante análisis teórico del problema simple (Sansò, 1981c) y, en general, del problema lineal (vectorial) de Molodensky en aproximación cuasi esférica (Sacerdote y Sansò, 1983a,b).

Además de los problemas que hemos comentado, están planteados en Geodesia otros problemas de contorno de frontera libre entre los que destacan los de Altimetría-Gravimetría y los de Gradiometría. En los primeros (también denominados problemas mixtos) se combinan medidas clásicas astrogeodésicas y gravimétricas sobre la superficie de los continentes con datos modernos acerca de la forma de la superficie de los océanos obtenidos por altimetría por satélites. De nuevo, estos problemas tienen un carácter no lineal y hasta ahora solo las correspondientes ecuaciones linealizadas en aproximación esférica han sido objeto de un amplio estudio (Holota, 1983a,b; Sacerdote y Sansò, 1983c; Sansò, 1983; Svensson, 1983, 1985). Los problemas de Gradiometría, poco estudiados hasta la fecha, han sido propuestos en (Sansò, 1981a; Heck, 1983).

En esta memoria estudiamos el problema de Molodensky escalar: linealización (por medio de la derivada con respecto de un parámetro y en el Teluroide), transformación angular-potencial que permite estudiar el problema no lineal en un dominio con frontera conocida y análisis del problema por medio del teorema de la función implícita de Nash-Hörmander. Previamente a su estudio, hemos comenzado nuestro trabajo con el análisis del problema de Molodensky vectorial, presentando así las principales técnicas que permiten establecer resultados locales de existencia y unicidad de solución para este tipo de problemas.

Deseamos concluir esta introducción observando que el papel fundamental de los problemas de contorno de la Geodesia ha sido reconocido en la resolución nº13 adoptada por la Asociación Internacional de Geodesia en la XXVIII Asamblea General de la IUGG (

Tscherning, 1984). Esto se materializa, dentro de la sección IV de dicha Asociación, en la existencia de un grupo especial de estudio (SSG 4-57) en cuyo programa de actividades destaca el "análisis de los principales problemas de contorno de la Geodesia como el problema clásico de Molodensky (formulación lineal y no lineal) o los problemas mixtos de Altimetría-Gravimetría" (Ibid. pag. 361).

RESUMEN DE LA MEMORIA

La memoria está dividida en tres capítulos. En el primero presentamos los diversos problemas de contorno de frontera libre de la Geodesia Física.

En 1.1 damos las definiciones y resultados básicos relativos al potencial gravífico terrestre y que necesitaremos después.

En 1.2, 1.3 y 1.4 planteamos, respectivamente, el problema de Molodensky vectorial, el problema de Molodensky escalar y los problemas de Altimetría-Gravimetría y de Gradiometría.

El segundo capítulo está dedicado al problema de Molodensky vectorial.

En 2.1 linealizamos el problema en el Teluroide (teorema 2.1) y por medio de la derivada con respecto de un parámetro. Ponemos de manifiesto la pérdida de diferenciabilidad de la inversa de la primera diferencial del operador que describe el problema.

En 2.2 analizamos los aspectos básicos del problema lineal (vectorial) de Molodensky. Demostramos la no unicidad de solución del problema relacionándola con la no unicidad de solución del problema no lineal (estudiada en 1.2), y presentamos el teorema de unicidad de Hörmander (teorema 2.3) obtenido una vez eliminadas las tres componentes armónicas de primer grado del potencial perturbador.

En 2.3 modificamos la noción de solución del problema, establecemos el teorema de la función implícita de Nash-Hörmander y analizamos con detalle el resultado de existencia y unicidad de solución para el problema no lineal obtenido por Hörmander.

En 2.4 estudiamos el problema vectorial de Molodensky en el espacio de la gravedad. Prestamos especial atención a la correspondiente formulación funcional del problema, y demostramos la equiva lencia, para una configuración inicial general, entre el problema lineal en el espacio de la gravedad y el problema lineal (vectorial) de Molodensky.

En el tercer capítulo estudiamos el problema de Molodensky escalar y demostramos un nuevo teorema de existencia y unicidad de solución por medio del teorema de la función implícita de Nash-Hörmander.

En 3.1 establecemos las dos posibles formulaciones funcionales del problema y las linealizamos con la técnica de la derivada con respecto de un parámetro. Analizamos las ecuaciones linealizadas en el caso esférico y demostramos la no unicidad de solución; esto nos conduce a una primera modificación del problema. Además, ponemos de manifiesto la existencia también en este problema de la mencionada pérdida de diferenciabilidad.

En 3.2 linealizamos el problema en el Teluroide (angular-potencial y angular-gravimétrico). Demostramos que las ecuaciones linealizadas del problema coinciden con la "ecuación fundamental de la Geodesia Física".

En 3.3 definimos la transformación angular-potencial introducida por Sacerdote y Sansò y establecemos sus propiedades (teorema 3.1). Con una técnica diferente a la utilizada por Sacerdote y Sansò, obtenemos la ecuación fundamental que el radio vector verifica en el nuevo espacio y ponemos de manifiesto la ventaja de la expresión que nosotros hemos obtenido. Concluimos esta sección presentando el teorema de existencia y unicidad de solución obtenido por Sacerdote y Sansò en un entorno del caso esférico una vez eliminada la rotación de la Tierra.

En la sección 3.4 estudiamos la existencia y unicidad de solución para el problema no lineal por medio del teorema de la función implícita de Nash-Hörmander. Hemos dividido la sección en dos apartados. En el primero estudiamos las ecuaciones linealizadas, y obtenemos en los espacios de Hölder una estimación de la λ-norma de la anomalía de la altitud (teorema 3.7). En la segunda, estimamos en dichos espacios la no linealidad del problema (Ec. 3.173), y concluimos con el teorema de existencia y unicidad.

Finalmente, incluimos un apéndice en el cual se recogen las propiedades de los espacios de Hölder utilizadas en este trabajo.

Notación básica

$\mathbb{R}^n$: espacio Euclídeo n-dimensional, con puntos $x=(x_1,\dots,x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$;

$r = |x| = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$

∂S : frontera de un conjunto de puntos S ; $\bar{S} = S \cup \partial S$

$D_i u = \partial u/\partial x_i$, $D_{ij} u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$

$\nabla u = (D_1 u, \dots, D_n u)$ gradiente de u

$M_u = (D_{ij} u)$ $i,j=1,\dots,n$ matriz hessiana de las segundas derivadas de u

$\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, con $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ designa un multi-índice; además,

$$D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u \Big/ \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} .$$

Si Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$,

$C^0(\Omega)[C^0(\bar{\Omega})]$ es el conjunto de las funciones continuas en $\Omega\,(\bar{\Omega})$

$C^k(\Omega)$ es el conjunto de funciones con derivadas de orden $\leq k$ continuas en Ω ($k>0$ o $k=\infty$)

$C^k(\bar{\Omega})$ es el conjunto de funciones de $C^k(\Omega)$ cuyas derivadas de orden $\leq k$ tienen extensiones continuas a $\bar{\Omega}$

$C_0^k(\Omega)$ es el conjunto de funciones en $C^k(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .

Además,

S^2: esfera unidad en $\mathbb{R}^3$

θ : colatitud esférica, λ = longitud esférica

$P_{nm}(\cos\theta)$ polinomio de Legendre de grado n y orden m .

En todo lo que sigue, supondremos que la Tierra es un cuerpo rígido con un potencial gravitatorio independiente del tiempo y rotando con velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijo en el espacio inercial, el cual consideraremos como eje X_3 , y que contiene a su centro de masas C_m . Esta hipótesis excluye -junto a efectos geodinámicos- los efectos gravitatorios directos e indirectos (como efectos de marea lunisolar) de otros cuerpos celestes.

El **potencial gravífico**, que designaremos por W , se define como la suma del potencial gravitatorio U y del potencial U_c debido a la fuerza centrífuga

$$U_c = \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.2}$$

de tal modo que

$$W(x) = U(x) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) \ . \tag{1.3}$$

Entre las diversas propiedades matemáticas del potencial gravitatorio conviene señalar las siguientes,

1. $$U(x) = \frac{GM}{r} + O(r^{-2}) \quad , \quad r \to \infty \tag{1.4}$$

siendo M la masa total de la Tierra.

2. $$\begin{cases} \Delta U = -4\pi G\rho & \text{en } S_i \qquad (1.5a) \\ \Delta U = 0 & \text{en } S_e \qquad (1.5b) \end{cases}$$

donde Δ es el operador de Laplace y S_e el exterior de las masas; la Eq.(1.5b) pone de manifiesto el carácter armónico de U en S_e.

Como consecuencia de (1.5a,b) y teniendo en cuenta que $\Delta U_c = 2\omega^2$ en todo $\mathbb{R}^3$, se obtiene para el potencial gravífico,

3. $$\begin{cases} \Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 & \text{en } S_i \qquad (1.6a) \\ \Delta W = 2\omega^2 & \text{en } S_e \qquad (1.6b) \end{cases}$$

El gradiente de W se denomina vector gravedad

$$\underline{g} = \nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right) \qquad i = 1,2,3$$

y a su modulo $|\underline{g}| = g$ simplemente gravedad. La dirección del vector gravedad viene definida por el vector unitario (exterior)

$$\underline{n} = -\underline{g}/g = (\cos\Phi\cos\Lambda, \cos\Phi \operatorname{sen}\Lambda, \operatorname{sen}\Phi) \qquad (1.7$$

siendo Φ y Λ la latitud y longitud astronómicas del punto bajo consideración (Figura 1.2).

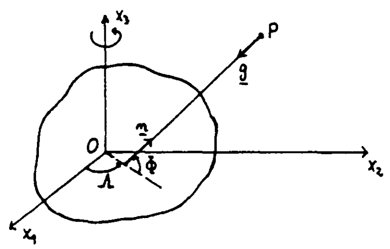

FIGURA 1.2

Las trayectorias ortogonales a las superficies de nivel o superficies equipotenciales $W = cte.$ son las líneas de fuerza del campo o líneas de la plomada y su dirección tangente es la dirección del vector gravedad. Entre las diferentes superficies equipotenciales del campo gravífico terrestre es particularmente importante en Geodesia Física la superficie denominada GEOIDE, parte de la cual está constituida por la superficie promedio total de los océanos; designaremos por W_0 el valor constante del potencial gravífico sobre dicha superficie.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas esféricas (r, θ, λ) , (r', θ', λ') respectivamente.

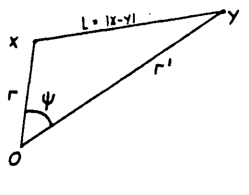

FIGURA 1.3

Por medio del desarrollo en armónicos zonales del inverso de la iistancia

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)$$

y la fórmula de descomposición

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left[R_{nm}(\theta,\lambda) R_{nm}(\theta',\lambda') + S_{nm}(\theta,\lambda)\, S_{nm}(\theta',\lambda')\right]$$

cor $R_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$

$$S_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\, m\lambda$$

se obtiene para el potencial gravitatorio (1.1) un desarrollo en armónicos esféricos de la forma

$$u(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm} \frac{R_{nm}(\theta,\lambda)}{r^{n+1}} + B_{nm} \frac{S_{nm}(\theta,\lambda)}{r^{n+1}} \right] \tag{1.8}$$

dorde

$$\begin{aligned} A_{n0} &= K\int_{S_i} r'^n P_n(\cos\theta')\, dm \\ A_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} K\int_{S_i} r'^n R_{nm}(\theta',\lambda')\, dm \\ B_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} K\int_{S_i} r'^n S_{nm}(\theta',\lambda')\, dm \end{aligned} \tag{1.9}$$

y $dm = \rho(y)dy$ es el elemento diferencial de masa. La serie (1.8) es convergente fuera de la esfera más pequeña que contiene completaiente a la Tierra.

Expresando en coordenadas cartesianas $r'^n R_{nm}$ y $r'^n S_{nm}$ se obtiene fácilmente para los coeficientes de primer grado ($n=1$)

$$A_{10} = K\int_{S_i} z'\, dm \;,\quad A_{11} = K\int_{S_i} x'\, dm \;,\quad B_{11} = K\int_{S_i} y'\, dm \;. \tag{1.10}$$

Por otra parte, las coordenadas cartesianas del centro de grvedad son

$$\xi = \frac{1}{M}\int_{S_i} x'\, dm \;,\quad \eta = \frac{1}{M}\int_{S_i} y'\, dm \;,\quad \zeta = \frac{1}{M}\int_{S_i} z'\, dm \;. \tag{1.11}$$

Si comparamos (1.10) y (1.11) se concluye que si el centro d gravedad se elige como origen del sistema de referencia, los armónicos de primer grado se anulan; en términos del comportamiento de u en el infinito se tiene entonces

$$u(x) = \frac{GM}{r} + O(r^{-3}) \quad , \quad r \to \infty \qquad (1.12$$

1.2 EL PROBLEMA DE MOLODENSKY VECTORIAL

El problema de Molodensky vectorial, introducido por primera vez en (Krarup,1969,1973), se formula de la siguiente manera: "dados, en todos los puntos de la superficie de la Tierra S , el potencial gravífico W y el vector gravedad $\underline{g}$, determinar la superficie S " (Moritz, 1980).

En lo que sigue, haremos uso de la siguiente notación ($|_S$ designa restricción a S)

$$W_S = W|_S$$
$$\underline{g}_S = \underline{g}|_S \ .$$

1. El potencial W_S puede ser determinado por nivelación geométrica combinada con medidas de la gravedad (Heiskanen-Moritz, 1985)

$$W_0 - W_S(A) = \int_0^A g \cdot dn \qquad (1.13)$$

con dn incremento de nivelación . Vemos que la fórmula anterior proporciona W_S salvo una constante aditiva, la cual puede determinarse indirectamente midiendo al menos una distancia (véase Ibidem,2.19).

.. La magnitud del vector gravedad g_s puede determinarse por gravimetría, mientras que su dirección se obtiene por medidas astro-geodésicas de la latitud Φ y la longitud Λ (cfr.1.7).

Planteado de esta forma, el problema de Molodensky vectorial es un problema de contorno de frontera libre (frontera desconocida) y de tipo derivada oblícua, pues se conoce sobre S el gradiente de W que en general no es ortogonal a la superficie de la Tierra.

A fin de parametrizar la clase de superficies en la cual buscar S, Hörmander(1976) considera S como la imagen de una inmersión diferenciable (es decir, una aplicación inyectiva con jacobiano regular) de la esfera unidad S^2 en $\mathbb{R}^3$,

$S = \varphi(S^2)$ con $\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ inmersión diferenciable.

El dominio exterior a S lo representaremos por Ω_φ.

Con esta hipótesis, los datos de contorno son entonces funciones

$$W_s : S^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \underline{g}_s : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

El problema de Molodensky vectorial se reduce entonces a encontrar una inmersión diferenciable $\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y una funciòn u definida en Ω_φ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega_\varphi \\ W_s = W \circ \varphi \quad , \quad \underline{g}_s = \nabla W \circ \varphi & \\ u \quad \text{regular en el infinito } (u = O(r^{-1})) & \end{cases}$$

donde $W(x) = u(x) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$ representa el potencial gravífico.

Planteado en estos términos, se comprueba fácilmente que el problema de Molodensky vectorial no tiene solución única por invarianza con respecto a traslaciones arbitrarias a lo largo de

X_3 (Sansò, 1981a). En efecto, sea (φ, u) solución del problema y consideremos

$$t : \bar{\Omega}_\varphi \longmapsto \mathbb{R}^3 \quad : \quad x \longmapsto x + \underline{c}$$

con $\underline{c} = (0, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. La imagen de $\varphi(S^2)$ por medio de la transformación anterior es la misma superficie trasladada a lo largo de X_3 una cantidad c (ver Figura 1.4) y la designaremos $\varphi'(S^2)$.

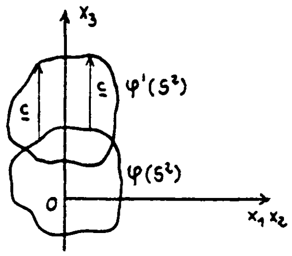

FIGURA 1.4

Consideremos el potencial "trasladado"

$$u' = u \circ t^{-1}$$

definido en $\bar{\Omega}_{\varphi'}$ con $t^{-1}(x) = x - \underline{c}$. Se tiene entonces

$$u' \circ \varphi' = u \circ t^{-1} \circ \varphi' = u \circ \varphi = W_s - \frac{1}{2}\omega^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

$$\nabla u' \circ \varphi' = \nabla u \circ t^{-1} \circ \varphi' = \nabla u \circ \varphi = \underline{g}_s - \omega^2(\varphi_1, \varphi_2, 0)$$

Puesto que el potencial centrífugo es igual para ambas configuraciones resulta finalmente que (φ', u') es tambien solución del problema de Molodensky vectorial.

Nota. En el caso ideal en que la rotación de la Tierra fuese nula ($\omega = 0$) la invarianza sería con respecto a traslaciones arbitrarias.

La indeterminación que hemos puesto de manifiesto desaparec si se impone que el <u>origen</u> del sistema de referencia adoptado sea el <u>centro de masas</u> terrestre; como ya hemos visto, en este caso el potencial gravitatorio no contiene componente armónica de primer grado y el problema de Molodensky vectorial se formula entonces en los siguientes términos

" dados W_s , $\underline{g}_s$ encontrar una inmersión diferenciable φ y una función u (potencial gravitatorio) definida en Ω_φ tal que

i) $\Delta u = 0$ en Ω_φ

(ii) $W_s = W \circ \varphi$ (1.14a)

(iii) $\underline{g}_s = \nabla W \circ \varphi$ (1.14b)

(iv) $u(x) = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3})$, $r \to \infty$, $\alpha_u \in \mathbb{R}^+$. " (1.15)

Supongamos φ conocida; la "resolución" del problema de Dirichlet para el potencial gravitatorio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ u \circ \varphi = W_s - \frac{1}{2}\omega^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) & \text{sobre } S^2 \\ u(x) = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) & , \quad r \to \infty \end{cases} \tag{1.16}$$

permite definir un operador Γ en la forma

$$\Gamma(W_s, \varphi) = \nabla W \circ \varphi \tag{1.17}$$

con $W(x) = u(x) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$ y u "solución" del problema de contorno (1.16). Con la introducción de este operador el problema de Molodensky vectorial se reduce a la resolución en φ de la ecuación funcional

$$\Gamma(W_s, \varphi) = \underline{g}_s \tag{1.18}$$

con W_s y $\underline{g}_s$ dados.

El principal inconveniente en el proceder descrito anteriormente, radica en la posibilidad de resolver el problema de contorno (1.16); en efecto, la ausencia de los tres armónicos de primer grado ($Y_{1i} = \frac{x_i}{r^3}$) en (1.15) implica, con φ conocida, que W_S debe verificar tres condiciones linealmente independientes. Esta cuestión puede ser resuelta, como veremos en la Secc.2.3, con la introducción de tres incógnitas adicionales en (1.14a).

1.3 EL PROBLEMA DE MOLODENSKY ESCALAR

Como resultado de los avances en Geodesia Espacial, existe la posibilidad de obtener a partir de observaciones interferométricas (G.P.S.), posiciones muy precisas de los puntos sobre la superficie de la Tierra en un sistema de referencia tridimensional. Este hecho, permite formular un problema de contorno con frontera conocida para el potencial gravitatorio a partir de observaciones de la gravedad sobre la superficie terrestre

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } S_e \\ |\nabla u + \omega^2(x_1, x_2, 0)| = g_s & \text{sobre } S \\ u = O(r^{-1}) & r \to \infty . \end{cases} \tag{1.19}$$

Este problema -no lineal en la condición de contorno- ha sido estudiado entre otros por (Bjerhammar y Svensson, 1983) y lo denominaremos problema gravimétrico con frontera fija. Así pues, tenemos hasta ahora la siguiente situación

	datos	Incógnitas
Molodensky vectorial	W_s , $\underline{g}_s$	φ , u
Gravimétrico (contorno fijo)	φ , g_s	u

Recientemente, se ha formulado un nuevo problema de contorno intermedio a ambos, denominado problema de contorno escalar de la Geodesia Física (Sacerdote y Sansó, 1986), en el cual parte de la geometría de la superficie terrestre es conocida. Nosotros nos referiremos a él simplemente como problema de Molodensky escalar.

Sea E_r un cierto elipsoide de referencia con eje menor en la dirección del eje x_3 y situemos el origen del sistema de coordenadas en el centro de E_r . En el problema de Molodensky escalar, junto al valor de la gravedad g y del potencial W se suponen conocidas las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) con respecto a E_r en cada uno de los puntos de S (Fig. 1.5).

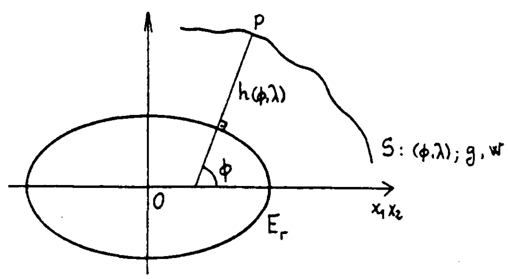

FIGURA 1.5

Para determinar completamente la geometría de S la única incógnita del problema es la **altitud elipsoídica** $h = h(\phi,\lambda)$ de todos los puntos $P \in S$.

Cbservamos que este problema de contorno (tambien de frontera libre) hace uso de los observables que más frecuentemente se consideran en Geodesia. En efecto, observaciones geodésicas de triangulación y trilateración proyectadas sobre E_r nos proveen con suficiente precisión de las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) ; por otra parte, hay una mayor y más uniforme distribución sobre S de medidas de g que de coordenadas astronómicas (Φ, Λ) las cuales se efectúan en casos excepcionales.

Con la notación introducida en el apartado anterior, es claro que g_s y W_s pueden ahora considerarse como funciones

$$g_s , W_s : E_r \longmapsto \mathbb{R} .$$

<u>Notación</u>. Dada una función $f : E_r \longmapsto \mathbb{R}$ representaremos por φ_f la aplicación $E_r \longmapsto \mathbb{R}^3$: $\varphi_f(\phi,\lambda) = \underline{x}_e + f(\phi,\lambda)\underline{e}_n$ con (ver Figura 1.6)

$$\underline{x}_e = (N\cos\phi\cos\lambda \ , N\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\lambda \ , \frac{b^2}{a^2} N\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

$$\underline{e}_n = (\cos\phi\cos\lambda \, , \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\lambda \, , \mathrm{sen}\,\phi)$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\mathrm{sen}^2\phi}} \quad \text{(radio de curvatura normal)}$$

siendo a, b los semiejes mayor y menor respectivamente del elipsoide de referencia.

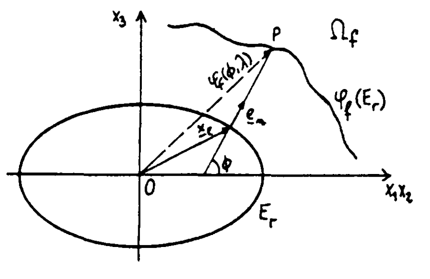

FIGURA 1.6

Además, designaremos por Ω_f el dominio exterior a $\varphi_f(E_r)$.

Dados W_s, g_s, el problema de Molodensky escalar se reduce a encontrar una función $h : E_r \longrightarrow \mathbb{R}$ (altitud elipsoídica) y una función u definida en Ω_h tal que:

(i) $\Delta u = 0$ en Ω_h

(ii) $W_s = W \circ \varphi_h$ (1.20a)

(iii) $g_s = |\nabla W \circ \varphi_h|$ (1.20b)

(iv) $u = O(r^{-1})$, $r \rightarrow \infty$

donde W viene definido por (1.3).

Con el fin de simplificar el análisis del Problema de Molodensky escalar (Cap.3), supondremos que sobre S se conocen las coordenadas esféricas (θ, λ) en vez de las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) con respecto a E_r. Suponiendo que la superficie desconocida S es la frontera de un dominio con forma de estrella respecto del origen, podemos en este caso plantear el problema de Molodensky escalar en los siguientes términos,

" Dadas dos funciones W_s, g_s definidas sobre la esfera unidad, encontrar una función $r : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (radio vector) y una función u definida en Ω_r tal que

i) $\Delta u = 0$ en Ω_r

(ii) $W_s = W \circ \varphi_r$ (1.21a)

(iii) $g_s = |\nabla W \circ \varphi_r|$ (1.21b)

(iv) $u = O(r^{-1})$, $r \rightarrow \infty$ " (Sacerdote y Sansó, 1986).

De nuevo, en las condiciones anteriores W representa el potencial gravífico definido por (1.3); por otra parte, φ_r se define en la forma

$$\varphi_r : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi_r(\theta, \lambda) = r(\theta, \lambda)\, \bar{e}_r$$

con $e_r = (\operatorname{sen}\theta \cos\lambda, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda, \cos\theta)$.

Ω_r designa el dominio exterior a $\varphi_r(S^2)$.

Como se verá en el capítulo 3, la última hipótesis introducida tan solo permite una mayor simplicidad a la hora de estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de Molodensky escalar; los métodos allí expuestos, incluida la aplicación del teorema de Nash-Hörmander, se generalizan facilmente al caso de trabajar con coordenadas elipsoídicas.

Desde el punto de vista geodésico, el punto más delicado en el planteamiento del problema es lo referente a la posibilidad de disponer con respecto a un sistema geodésico mundial de una red de datos (ϕ , λ) suficientemente precisa a partir de observaciones geodésicas de triangulación-trilateración.

En cualquier caso, el estudio de este problema esta doblemente justificado:

(1) debido a su valor histórico pues, como veremos en el Cap. 3, las ecuaciones linealizadas de (1.21a,b) nos conducen a la clásica "ecuación fundamental de la Geodesia Física"; de esta forma, el problema lineal de contorno asociado al problema escalar coincide con el denominado "problema de Molodensky" en los tratados clásicos como, por ejemplo, (Heiskanen y Moritz, 1985; Cap.8);

(2) desde el punto de vista físico, el problema de Molodensky escalar es la base teórica natural para el estudio de problemas cinemáticos cuando se supone conocida la dirección de la deformación; por ejemplo, cuando por razones geofísicas o geológicas tenemos certeza de la existencia de un desplazamiento puramente vertical de la corteza terrestre. Con razonamientos análogos a los expuestos en (Sansò y Dermanis, 1982) puede entonces obtenerse la versión cinemática de (1.21a,b).

1.4 EL PROBLEMA DE CONTORNO DE ALTIMETRIA-GRAVIMETRIA EL PROBLEMA DE CONTORNO DE GRADIOMETRIA

Por medio de la **altimetría por satélites**, es posible plantear problemas de contorno mixtos en los cuales parte de la frontera es conocida (esencialmente la superficie de los océanos) y parte desconocida (los continentes). Tales problemas se denominan en general de Altimetría-Gravimetría (Sansò, 1981a).

La técnica de altimetría por satélites está basada en un altímetro a bordo de un satélite que transmite impulsos radar en dirección vertical a la superficie terrestre. Estos impulsos son reflejados perpendicularmente por la superficie del océano y midiendo el tiempo de propagación se obtiene la altura h_s del satélite sobre la superficie instantánea del océano (Figura 1.7)

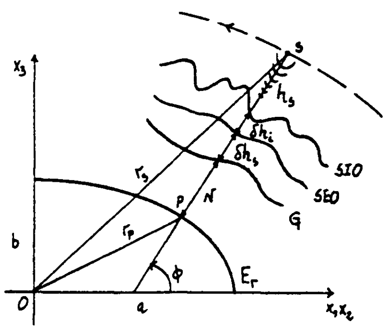

FIGURA 1.7

En la Figura 1.7, SIO representa la superficie instantánea del océano, SEO la superficie cuasiestacionaria del océano y G el geoide; δh_i , δh_s y N (ondulación del geoide) son las respectivas separaciones entre las superficies que aparecen en la figura; por último, r_s y r_p son, respectivamente, el radio vector del satélite y el radio vector de la proyección normal del satélite sobre el elipsoide de referencia E_r .

La superficie cuasiestacionaria del océano se obtiene a partir de la instantánea después de considerar variaciones dependientes del tiempo que incluyen:

- mareas oceánicas
- variaciones de origen meteorológico (presión atmosférica, vientos)
- variaciones de origen oceanográfico (corrientes oceánicas, diferencias en densidad de agua debido a variaciones de temperatura, salinidad, presión)
- régimen de aguas.

Aun considerados todos los efectos citados anteriormente, la superficie cuasiestacionaria no es una superficie de nivel del campo gravífico terrestre con desviaciones de, aproximadamente, 1m. Esta situación se debe principalmente a la deformación permanente de las superficies de nivel causada por la marea luni-solar y efectos constantes de tipo meteorológico y oceanográfico imposibles de controlar.

Con estas observaciones, una definición más convincente del geoide que la admitida clásicamente (Sec.1.1) ha sido dada por Mather (1978) como la superficie de nivel que "mejor" se ajusta a la superficie cuasiestacionaria o nivel medio del mar: en efecto, imponiendo una condición de mínimo (mínimos cuadrados) para las diferencias entre el geoide y SEO puede estimarse el potencial y la ondulación del geoide.

Una de las ecuaciones básicas de altimetría por satélites relacionando todos los parámetros que aparecen en la Figura 1.7 es (Torge, 1980)

$$h_s = r_s - r_p + \frac{r_p}{8}\left(1 - \frac{r_p}{r_s}\right) e^4 \operatorname{sen}^2 2\phi - (N + \delta h_i + \delta h_s) .$$

Conocida la órbita del satélite y la separación δh_i entre las superficies instantánea y cuasiestacionaria del océano, la fórmula anterior permite determinar la separación $(N + \delta h_s)$ entre el elipsoide de referencia y la superficie cuasiestacionaria.

Dependiendo de que δh_s sea desconocido o conocido, podemos platear dos tipos diferentes de problemas de contorno de altimetra-gravimetría.

(a δh_s desconocido

En este caso, es conocida con respecto a un sistema de referecia geocéntrico la superficie cuasiestacionaria del océano (S_0). Adcionalmente, supondremos que se dispone de medidas de la graveda sobre la superficie instantánea del océano, convenientemente reucidas a la superficie cuasiestacionaria.

Si sobre los continentes (S_c) se conoce el potencial y el vetor gravedad, podemos entonces plantear el siguiente problema:

" ada una superficie S , parte de la cual S_c es desconocida y pate de la cual S_0 es conocida, y dados W_0 , $\underline{g}_c$ sobre S_c y , sobre S_0 determinar una función u y S_c tal que

i) $\Delta u = 0$ fuera de $S = S_0 \cup S_c$

(i) $W_c = W$, $\underline{g}_c = \nabla W$ sobre S_c

(ii) $g_0 = |\nabla W|$ sobre S_0

(v) $u = O(r^{-1})$, $r \to \infty$

dode W es el potencial gravífico definido por (1.3)"

(Sansò, 1983)

(t δh_s conocido

Si por información geofísica adicional δh_s es conocido, los daos obtenidos por altimetría permiten la determinación directa de geoide. En este caso, ninguna información geodésica adicional esnecesaria sobre los océanos pues $W = W_0$ = cte. sobre el geoidecon W_0 conocido.

Despreciando la diferencia entre el geoide y la superficie cuasiestacionaria, con los mismos datos sobre S_c se puede entonces plantear el siguiente problema

" encontrar una función u y S_c tal que

(i) $\Delta u = 0$ fuera de $S = S_o \cup S_c$

(ii) $W_c = W$, $\underline{g}_c = \nabla W$ sobre S_c

(iii) $W_o = W$ sobre S_o

(iv) $u = O(r^{-1})$ $r \to \infty$

donde W es el potencial gravífico definido por (1.3)"

(Sansò, 1983)

La diferencia esencial entre ambos problemas (no lineales con frontera semilibre) radica en la condición de contorno de W sobre la superficie de los océanos: mientras que en el caso (a) es no lineal, en el caso (b) es lineal de tipo Dirichlet.

Finalizamos esta Sección con la formulación del problema de contorno de gradiometría (Sansò, 1981a; Heck, 1983) que se caracteriza por el conocimiento sobre la superficie terrestre del gradiente vertical de la gravedad. Por definición, el gradiente vertical de la gravedad o derivada gradiométrica es la variación de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada

$$G = \frac{dg}{dh} \quad , \quad \underline{h} = (\cos\Phi \cos\Lambda , \cos\Phi \operatorname{sen}\Lambda , \operatorname{sen}\Phi) .$$

Si tenemos en cuenta que

$$2g D_j g = \sum_{i=1}^{3} 2 D_i W \cdot D_{ij} W \quad , \quad j = 1,2,3$$

podemos expresar G en función de las primeras y segundas derivadas del potencial gravífico, en la forma

$$G = \langle \nabla g , \underline{h} \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} g^{-2} \cdot D_i W \cdot D_j W \cdot D_{ij} W .$$

Por medio de gradiómetros estáticos, el gradiente vertical de la gravedad puede determinarse de modo indirecto midiendo la diferencia de gravedad entre dos puntos próximos sobre la misma línea de la plomada. De este modo, puede lograrse en teoría precisiones comparables a las obtenidas mediante balanzas de torsión ($\pm$ 0.0001 mgal/m); sin embargo, estas observaciones son muy susceptibles a efectos ambientales y pequeñas perturbaciones locales (Groten, 1979).

Si Φ, Λ y G se suponen conocidos sobre S, podemos plantear dos tipos diferentes de problemas de contorno de gradiometría, dependiendo de cual sea el otro observable: W o g.

(a) <u>Datos: (Φ , Λ , W , G)</u>

"Conocido sobre S el <u>gradiente vertical de la gravedad</u> G, el <u>potencial gravífico</u> W y las <u>coordenadas astronómicas</u> (Φ , Λ), determinar la superficie S y el potencial exterior gravitatorio"

Si suponemos que S está en correspondencia uno a uno con la esfera unidad por medio de una inmersión diferenciable φ (véase, Sec.1.2) podemos considerar

$$G_S : S^2 \longrightarrow \mathbb{R} .$$

El problema es entonces, encontrar una inmersión $\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y una función u definida en el exterior de $\varphi(S^2)$ tal que

(i) $\Delta u = 0 \quad$ en Ω_φ

(ii) $G_S = \sum_{i,j=1}^{3} (|\nabla W| \circ \varphi)^{-2} (D_i W \circ \varphi)(D_j W \circ \varphi)(D_{ij} W \circ \varphi)$

(iii) $W_S = W \circ \varphi$

(iv) $(\cos\Phi \cos\Lambda ,\ \cos\Phi \operatorname{sen}\Lambda ,\ \operatorname{sen}\Phi) = \dfrac{\nabla W \circ \varphi}{|\nabla W| \circ \varphi}$

(v) $u = O(r^{-1}) \quad , \quad r \rightarrow \infty$

donde W es el potencial gravífico definido por (1.3)."

(b) <u>Datos: (∇W , G)</u>

" conocido sobre S el <u>gradiente vertical de la gravedad</u> G y el <u>vector gravedad</u> $\underline{g}$, determinar la superficie S y el potencial exterior gravitatorio"

Con la misma hipótesis sobre S que en (a), el problema es encontrar una inmersión diferenciable φ y una función u definida en el exterior de $\varphi(S^2)$ tal que

(i) $\Delta u = 0$ en Ω_φ

(ii) $G_s = \sum_{i,j=1}^{3} (|\nabla W \circ \varphi|)^{-2} (D_i W \circ \varphi)(D_j W \circ \varphi)(D_{ij} W \circ \varphi)$

(iii) $\underline{g}_s = \nabla W \circ \varphi$

(iv) $u = O(r^{-1})$, $r \to \infty$

donde W es el potencial gravífico definido por (1.3)."

<u>Observaciones</u>.

1. (Heck, 1983) Si pudiésemos medir las segundas derivadas del potencial gravífico W_{ij} con respecto al sistema de referencia general fijo a la Tierra, sería posible formular diferentes problemas de contorno suponiendo conocidas dos componentes de (W_{ij}) en vez de Φ y Λ . Sin embargo, tal planteamiento no está justificado desde el punto de vista práctico; en efecto, las componentes W_{ij} (excepto W_{22} y W_{11} , para las cuales solo podemos determinar directamente la combinación $W_{22} - W_{11}$) se miden por medio de balanzas de torsión con respecto a un sistema de referencia local astronómico (véase, por ejemplo, Groten, 1979). Una transformación al sistema general requiere el conocimiento de Φ y Λ , y por tanto estas cantidades serían de nuevo datos del problema de contorno.

2. Los problemas formulados previamente pueden denominarse, en paralelismo con la Sec.1.2, problemas de contorno de gradiometría <u>vectoriales</u> al ser la incógnita el vector de posición de cada uno de los puntos de S . Si suponemos conocidas sobre S las coor-

elipsoídicas (ϕ , λ) (cfr.Sec.1.3), podemos tambien considerar los correspondientes problemas <u>escalares</u> siendo la incógnita la altitud elipsoídica como función de (ϕ , λ).

CAPITULO 2

PROBLEMA DE MOLODENSKY VECTORIAL

En este capítulo estudiamos el problema de Molodensky vectorial.

En primer lugar, linealizamos el problema y presentamos el teorema de existencia y unicidad de solución, obtenido por Hörmander, para el problema lineal de Molodensky.

A continuación, se analiza el problema no lineal por medio del teorema de la función implícita de **Nash-Hörmander.**

Por último, se estudia el problema no lineal en el espacio de la gravedad presentando el problema de contorno no lineal para el potencial adjunto, el cual se resuelve por medio del teorema general de la función implícita utilizando los resultados de la Sec.2.2.

2.1 LINEALIZACION

El problema de Molodensky vectorial, al igual que todos los problemas de contorno presentados en el Capítulo anterior, es un problema no lineal de frontera libre. Si pensamos en el método usual de aproximaciones sucesivas para resolver este tipo de problemas, observamos que la primera etapa en el estudio del problema que nos ocupa debe ser necesariamente la obtención y el análisis de las correspondientes ecuaciones linealizadas. Krarup (1969 ; 1973), cuyos resultados expondremos en la primera parte de esta Sección, fue el primero en obtener dichas ecuaciones. La idea básica, utilizada tradicionalmente en Geodesia Física (Heiskanen-Moritz, 1985), consiste en la introducción de convenientes valores aproximados -del potencial gravífico y de la superficie terrestre- para posteriormente, en un entorno de dichos valores, aplicar el teorema de Taylor hasta 1^{er} orden.

Por un U -potencial, entenderemos una función v regular definida en alguna región abierta Ω verificándose:

(i) $\bar{\Omega}_{\varphi} \subset \Omega$, $o \notin \bar{\Omega}$

(ii) $\nabla v \neq 0$, $\det(M_v) \neq 0$ en $\bar{\Omega}$

(iii) $v = v_g + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$

(iv) $\Delta v_g = 0$ en $\bar{\Omega}$

(v) $\exists \alpha_v \in \mathbb{R}^+$, $v_g = \frac{\alpha_v}{r} + O(r^{-3})$, $r \to \infty$ (2.1)

donde ω es el velocidad angular media de la Tierra, y M_v la matriz de las segundas derivadas de v .

La primera condición indica que el dominio de definición de v es lo suficientemente grande como para estar seguros de que la superficie terrestre está contenida en él. La condición $\det(M_v) \neq 0$ es muy importante en el proceso de linealización y recibe el nombre de condición de Marussi. Se observa además ((iii)), la descomposición de v en una componente gravitatoria v_g y un potencial centrífugo igual al terrestre. La última condición expresa que el baricentro de la distribución de masas asociada al potencial gravitatorio v_g , se ha situado en el origen del sistema de referencia adoptado.

Dado un punto $p \in \Omega$, las componentes del gradiente de v en p en el sistema de referencia general reciben el nombre de coordenadas gravimétricas con respecto a v de p . Por otra parte, si designamos por (ϕ_v, λ_v) las coordenadas curvilíneas que definen la dirección del gradiente de v , la terna

$$(v(p), \phi_v(p), \lambda_v(p))$$

recibe el nombre de coordenadas de Marussi con respecto a v de p .

Observamos, que las coordenadas de Marussi con respecto de W de un punto $p \in \bar{\Omega}_{\varphi}$, tambien denominadas coordenadas naturales, son el potencial gravífico en P, la latitud astronómica de P y la longitud astronómica de P (Fig. 2.1).

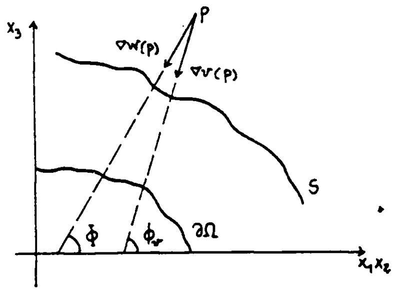

FIGURA 2.1

Por razones que iremos viendo a lo largo de este capítulo, las aproximaciones de W deben buscarse en la clase de los U-potenciales. Una posible elección, bien conocida en Geodesia Física, es el denominado <u>potencial normal de referencia</u>, el cual se define como el potencial gravífico de un elipsoide de revolución con tamaño y masa próximos a los de la Tierra y con velocidad angular de rotación igual a la de la Tierra; como hipótesis adicional, se supone que dicho elipsoide es superficie equipotencial del potencial normal. Con estos requisitos, la determinación del potencial normal de referencia se reduce a la resolución de un problema de Dirichlet, cuya solución explícita puede encontrarse en (Heiskanen-Moritz, 1985). Por otra parte, si el centro del elipsoide coincide con el origen del sistema de referencia, la condición (v) se verifica con $\alpha_v = kM_e$ con M_e masa del elipsoide.

Las aproximaciones de la superficie de la Tierra las consideraremos pertenecientes a la clase de las inmersiones diferenciables de la esfera unidad S^2 en $\mathbb{R}^3$ y las representaremos en general por φ_e.

La superficie modelo φ_0 , que se denomina Teluroide, generalmente se construye punto a punto a partir de datos astronómicos y gravimétricos obtenidos por observación y las correspondientes cantidades asociadas al potencial de referencia v .

Consideremos tres observables independientes Ψ_i , $i=1,2,3$; en un punto $p \in S$ ($p = \varphi(\sigma)$, $\sigma \in S^2$), estas cantidades dependen de la posición del punto en el espacio y del potencial gravífico

$$\Psi_i = \Psi_i(\varphi_j(\sigma)\ w) \qquad i,j=1,2,3 .$$

Por otra parte, sean Θ_i tres cantidades físicas independientes relacionadas con el potencial de referencia v ; la idea es definir $\varphi_0(\sigma)$ de forma que

$$\Theta_i(\varphi_{0j}(\sigma); v) = \Psi_i(\varphi_j(\sigma); w) \qquad i,j=1,2,3 . \tag{2.2}$$

Teniendo en cuenta cuales son los datos de contorno en el problema de Molodensky vectorial (Sec.1.2), son bastante naturales las dos siguientes elecciones,

(a) $\Psi = \nabla w$, $\Theta = \nabla v$

en cuyo caso (2.2) se convierte en

$$\nabla v(\varphi_0(\sigma)) = \nabla w(\varphi(\sigma)) = g_s(\sigma) . \tag{2.3}$$

(b) $\Psi = (w , \Phi , \Lambda)$, $\Theta = (v , \phi_v , \lambda_v)$

y entonces

$$\begin{cases} v(\varphi_0(\sigma)) = w(\varphi(\sigma)) = w_s(\sigma) \\ \phi_v(\varphi_0(\sigma)) = \Phi(\varphi(\sigma)) \\ \lambda_v(\varphi_0(\sigma)) = \Lambda(\varphi(\sigma)) . \end{cases} \tag{2.4}$$

Las ecuaciones (2.4) son equivalentes a

$$\begin{cases} v(\varphi_0(\sigma)) = W_S(\sigma) \\ \underline{g}_s / |\underline{g}_s| = \nabla v(\varphi_0(\sigma)) / |\nabla v(\varphi_0(\sigma))| \, . \end{cases} \tag{2.5}$$

El Teluroide que se obtiene por medio de (2.3) se denomina "<u>gravimétrico</u>", pues las coordenadas gravimétricas de $\varphi(\sigma)$ y $\varphi_0(\sigma)$ son iguales. Por otra parte, en (2.4) intervienen las coordenadas de Marussi y por este motivo el Teluroide así definido se denomina "<u>de Marussi</u>".

La diferencia entre el potencial gravífico W y el potencial de referencia v se designa por T , es decir

$$T = W - v \tag{2.6}$$

y se llama <u>potencial perturbador</u>. De la condición (i) impuesta al potencial de referencia, se deduce que el potencial perturbador está definido en el exterior de la superficie terrestre; además, al ser el potencial centrífugo idéntico en las expresiones de W y v , la función T puede también escribirse en la forma

$$T = u - v_g$$

con u componente gravitatoria de W . Esta última expresión indica el carácter armónico de T en Ω_φ . En general, el comportamiento de T en el infinito será

$$T = O(r^{-1}) \quad , \quad r \to \infty \, .$$

Junto al carácter armónico de T en Ω_φ se puede encontrar, en primer orden de aproximación, una relación funcional del tipo

$$B(x, T(x), \nabla T(x)) \quad , \quad x \in \varphi(S^2)$$

donde B es un operador lineal diferencial de primer orden. Esta relación recibe el nombre de <u>ecuación fundamental de contorno</u> para el problema lineal (vectorial) de Molodensky. Concretamente, Teorema 2.1

Sea v un $\mathcal{U}$-potencial de referencia y φ_0 un Teluroide asociado a v suficientemente próximos a W y φ . Entonces, en primer orden de aproximación, se tiene:

(i) $$\psi \doteq (M_v^{-1}\circ\varphi_0)\cdot\left[\overline{\Delta g} - \nabla T\circ\varphi\right] \qquad (2.7)$$

donde $\psi = \varphi - \varphi_0$ y $\overline{\Delta g} = \underline{g}_s - \nabla v\circ\varphi_0$.

(ii) $$T\circ\varphi + \langle h\circ\varphi_0 , \nabla T\circ\varphi\rangle \doteq f \quad \text{sobre } S^2 \qquad (2.8)$$

donde $f = \Delta W + \langle h\circ\varphi_0 , \overline{\Delta g}\rangle$, $\Delta W = W_s - v\circ\varphi_0$ y

$$h = -M_v^{-1}(\nabla v) \text{ .} \qquad (2.9)$$

Demostración

Según (1.14 a,b), sobre la superficie de la Tierra tenemos

$$W_s = W\circ\varphi$$

$$\underline{g}_s = \nabla W\circ\varphi \text{ .}$$

Si consideramos el potencial perturbador, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en la forma

$$W_s = v\circ\varphi + T\circ\varphi$$

$$\underline{g}_s = \nabla v\circ\varphi + \nabla T\circ\varphi \text{ .}$$

Puesto que v y φ_0 son próximos a W y φ , en primer orden de aproximación tenemos

$$W_s \doteq v\circ\varphi_0 + \langle\nabla v\circ\varphi_0 , \psi\rangle + T\circ\varphi$$

$$\underline{g}_s \doteq \nabla v\circ\varphi_0 + (M_v\circ\varphi_0)\psi + \nabla T\circ\varphi$$

donde $\psi = \varphi - \varphi_0$ es el vector desviación entre la superficie de la Tierra y el Teluroide.

Si tenemos en cuenta que v verifica la condición de Marussi, la última de las ecuaciones anteriores nos permite determinar ψ :

$$\psi = (M_v \circ \varphi_0)^{-1} \cdot [\Delta \bar{g} - \nabla T \circ \varphi] .$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación obtenemos

$$W_s = v \circ \varphi_0 + \langle \nabla v \circ \varphi_0 , (M_v^{-1} \circ \varphi_0)[\Delta \bar{g} - \nabla T \circ \varphi] \rangle + T \circ \varphi$$

que se convierte en

$$\Delta W = \langle (M_v^{-1} \circ \varphi_0)(\nabla v \circ \varphi_0) , \Delta \bar{g} - \nabla T \circ \varphi \rangle + T \circ \varphi$$

sin más que tener en cuenta la simetría de la matriz M_v^{-1} . Por último, si designamos por $\underline{h}$ a $-M_v^{-1}(\nabla v)$, esta ecuación es la (2.8).

Las diferencias ΔW , $\Delta \bar{g}$ reciben el nombre de "<u>anomalía del potencial</u>" y "<u>vector anomalía de la gravedad</u>" respectivamente. Si φ_0 es el Teluroide de Marussi tendremos $\Delta W = 0$; por otra parte, si φ_0 es el Teluroide gravimétrico $\Delta \bar{g} = 0$.

El campo de vectores $\underline{h}$ se denomina <u>campo isocenital</u> asociado al potencial v y es tangente a la curva a lo largo de la cual el vector ∇v tiene una dirección fija (véase, por ejemplo Moritz, 1980).

Si v_e es el potencial de una esfera de nivel de radio R

$$v_e = \frac{v_0 R}{r} \quad , \quad r > R \tag{2.10}$$

donde v_0 es el valor constante de v sobre la superficie de la esfera, el campo isocenital coincide con el campo radial, es decir

$$\underline{h} = \underline{x}/r . \tag{2.11}$$

En efecto, la función

$$\nabla v_e = \frac{-v_0 R}{r^3} \underline{x}$$

es homogénea de grado -2 , y en virtud de las relaciones de homogeneidad de Euler obtenemos

$$\sum_{j=1}^{3} D_{ij} v_e \cdot x_j = -2 D_i v_e \qquad , \quad i = 1,2,3$$

o en forma vectorial

$$M_{v_e} \underline{x} = -2 \nabla v_e \ .$$

Las Ecs. (2.7), (2.8) contienen la información completa para plantear la linealización en el Teluroide del problema de Molodensky vectorial, que establecemos en los siguientes términos:

Etapa I

(i) En primera aproximación consideramos $\varphi_{(1)} = \varphi_0$;

(ii) Analizar la existencia y unicidad de solución del problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en} \quad \Omega_{\varphi_0} \\ T \circ \varphi_0 + \langle h \circ \varphi_0 , \nabla T \circ \varphi_0 \rangle = f & \text{sobre} \quad S^2 \\ T = O(r^{-1}) \ , \quad r \to \infty \ ; \end{cases} \tag{2.12}$$

Etapa II

En el caso óptimo en que (2.12) tenga una única solución T , una segunda aproximación de la superficie de la Tierra es

$$\varphi_{(2)} = \varphi_0 + \psi = \varphi_0 + (M_v^{-1} \circ \varphi_0)[\,\overline{\Delta g} - \nabla T \circ \varphi_0\,] . \tag{2.13}$$

El problema de contorno (2.12) se denomina problema lineal (vectorial) de Molodensky.

Con la elección (2.10) para el U-potencial v , la condición de contorno en (2.12) adquiere la forma

$$T\circ\varphi_0 + \langle x/2 , \nabla T\circ\varphi_0 \rangle = f \quad \text{sobre} \quad S^2$$

que también podemos escribir

$$2T + r\frac{\partial T}{\partial r} = 2f \quad \text{sobre} \quad \varphi_0(S^2) .$$

En este caso, el problema de contorno se denomina problema simple de Molodensky.

Si además de considerar un potencial de referencia esférico, suponemos que el Teluroide es una esfera de radio R , el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{fuera de } S^2_R \\ 2T + r\dfrac{\partial T}{\partial r} = 2f & \text{sobre } S^2_R \\ T = O(r^{-1}) , \quad r\to\infty \end{cases} \tag{2.14}$$

es el conocido problema de Stokes, directamente relacionado con la determinación del geoide gravimétrico (Heiskanen-Moritz, 1985).

Con la representación funcional del problema introducida en la sección (1.2), la obtención de las ecuaciones linealizadas puede también realizarse por medio de la derivada con respecto a un parámetro continuo (Hörmander, 1976).

Si no suponemos que el origen del sistema de referencia coincide con el centro de masas terrestre, la resolución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ u\circ\varphi = W_s - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2+x_2^2) & \text{sobre } S^2 \\ u = O(r^{-1}) , \quad r\to\infty \end{cases} \tag{2.15}$$

permite definir $\underline{g}_s$ como un funcional Γ de W_s y φ ,

$$\underline{g}_s = \Gamma(W_s, \varphi) = \nabla W \circ \varphi$$

donde $W = u + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$ y u es solución de (2.15).

A fin de linealizar el operador Γ , calculemos su derivada de Fréchet (véase, por ejemplo, Kantorovich y Akilov (1964)). Supongamos que W_s , $\underline{g}_s$, φ , u y W son regulares y dependen suavemente de un parámetro $\tilde{\theta}$. Representando la derivada con respecto a $\tilde{\theta}$ con un punto encima de la variable, obtenemos

$$\frac{d}{d\theta}\Gamma(W_s, \varphi) = \dot{\underline{g}}_s = \nabla \dot{u} \circ \varphi + (M_W \circ \varphi)\dot{\varphi} \qquad (2.16)$$

puesto que $\dot{W} = \dot{u}$.

La función $\dot{u}$ es armónica en Ω_φ con igual comportamiento en el infinito que u . Derivando con respecto de $\tilde{\theta}$ la expresión

$$u \circ \varphi = W_s - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

obtenemos sobre S^2

$$\dot{u} \circ \varphi + \langle \nabla u \circ \varphi , \dot{\varphi} \rangle = \dot{W}_s - \omega^2(\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \dot{\varphi}_2)$$

es decir

$$\dot{u} \circ \varphi = \dot{W}_s - \langle \underline{g}_s , \dot{\varphi} \rangle . \qquad (2.17)$$

Así pues, la derivada de Fréchet de Γ en (W_s , φ) en la dirección ($\dot{W}_s$, $\dot{\varphi}$), que designaremos por $\Gamma'(W_s, \varphi)(\dot{W}_s, \dot{\varphi})$, viene dada por (2.16) con $\dot{u}$ solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ \dot{u} \circ \varphi = \dot{W}_s - \langle \underline{g}_s , \dot{\varphi} \rangle & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u} = O(r^{-1}) \ , & r \to \infty . \end{cases} \qquad (2.18)$$

Eliminemos ahora $\dot{\varphi}$ de la ecuación (2.16). Esto será posible si sobre S^2 se verifica

$\det(M_w \circ \varphi) \neq 0$ (condición de Marussi)

en cuyo caso

$$\dot{\varphi} = (M_w \circ \varphi)^{-1} \cdot [\dot{\underline{g}}_s - \nabla \dot{u} \circ \varphi] . \qquad (2.19)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.17), obtenemos la condición de contorno que $\dot{u}$ verifica sobre $\varphi(S^2)$

$$\dot{u} \circ \varphi - \langle (M_w \circ \varphi)^{-1} \underline{g}_s , \nabla \dot{u} \circ \varphi \rangle = \dot{w}_s - \langle (M_w \circ \varphi)^{-1} \underline{g}_s , \dot{\underline{g}}_s \rangle . \qquad (2.20)$$

Se observa que $(M_w \circ \varphi)^{-1} \underline{g}_s$ es el campo isocenital de w sobre $\varphi(S^2)$; así pues, con la notación introducida anteriormente la Ec.(2.20) puede ser escrita en la forma

$$\dot{u} \circ \varphi + \langle h \circ \varphi , \nabla \dot{u} \circ \varphi \rangle = \dot{w}_s - \langle h \circ \varphi , \dot{\underline{g}}_s \rangle . \qquad (2.21)$$

Si el problema lineal (vectorial) de Molodensky

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ \dot{u} \circ \varphi + \langle h \circ \varphi , \nabla \dot{u} \circ \varphi \rangle = \dot{w}_s - \langle h \circ \varphi , \dot{\underline{g}}_s \rangle & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u} = O(r^{-1}) , \quad r \to \infty & \end{cases} \qquad (2.22)$$

admite una única solución, (2.19) representa la <u>inversa de la primera diferencial</u> $\Gamma'(w_s , \varphi)$.

Es conveniente observar que las perturbaciones $\dot{\varphi}$, $\dot{u}$, $\dot{w}_s$, $\dot{\underline{g}}_s$ son el equivalente continuo a los incrementos ψ , T , Δw , y $\overline{\Delta g}$, que aparecen en el proceso de linealización sobre el Teluroide (Moritz, 1977).

El principal inconveniente de la fórmula (2.19) o su análoga (2.7) es la <u>pérdida de diferenciabilidad</u> a que dan lugar. En efecto, supongamos una solución aproximada φ_0 (φ) con k derivadas; entonces, el campo isocenital tendrá $k-2$ derivadas y no podemos esperar más de $\kappa-1$ derivadas para T ($\dot{u}$) y $\kappa-2$ para ψ ($\dot{\varphi}$). No cabe duda, que un procedimiento iterativo basado en (2.19) (resp. (2.7)) para la determinación de la superficie terrestre, pronto daría lugar a una completa pérdida de regularidad con respecto a una configuración inicial dada, debiendo evitarse en trabajos prácticos.

Las observaciones anteriores, justifican el uso del teorema de Nash-Hörmander (Secc. 2.3) para el estudio de la existencia y unicidad de solución de la ecuación funcional (1.18). Por otra parte, como veremos en la sección 2.4, esta situación no se presenta si trabajamos en el espacio de la gravedad permitiéndonos aplicar el teorema clásico de la función inversa para resolver el problema no lineal de contorno que verifica el potencial adjunto.

2.2 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA LINEAL (VECTORIAL) DE MOLODENSKY

En este apartado, se presentan los principales resultados sobre la existencia y unicidad de solución del problema lineal (vectorial) de Molodensky.

Puesto que, en general, la dirección del campo isocenital no coincide con la normal a la superficie del Teluroide, el problema de contorno (2.22) es del tipo "derivada oblícua". Además, supondremos que es regular en el sentido de que el campo isocenital no es en ningún punto de $\varphi_o(S^2)$ tangente a la superficie.

El índice de un problema de contorno se define como la diferencia entre la dimensión del núcleo y la codimensión del rango[1] (ver, por ejemplo, Hörmander (1963)), y se demuestra que el problema de contorno regular de derivada oblícua tiene índice cero

(**Hörmander** (1964) o, explícitamente para dominios exteriores, **Mc Owen** (1981)). Esto permite garantizar la alternativa de Fredholm, según la cual

" o bien el problema no homogéneo admite una única solución, o bien el problema homogéneo ($f = 0$) admite n soluciones linealmente independientes, en cuyo caso el problema no homogéneo admite solución si y solamente si f verifica n condiciones linealmente independientes."

Este resultado reduce el estudio de la existencia de solución del problema no homogéneo al estudio de la unicidad del problema homogéneo asociado. Analicemos pues el problema homogéneo correspondiente a (2.22).

En lo que sigue, será útil la siguiente expresión para la condición de contorno (2.8) (**Krarup**, 1969)

$$\det\left(\begin{array}{c|c} T\circ\varphi_0 & D_i v\circ\varphi_0 \\ \hline D_j T\circ\varphi_0 & D_{ij} v\circ\varphi_0 \end{array}\right)\cdot\left[\det(M_v\circ\varphi_0)\right]^{-1} = f \;, \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ j=1,2,3\,. \end{array} \tag{2.23}$$

Supongamos en primer lugar que la Tierra fuese un cuerpo sin rotación ($\omega = 0$). En este caso, las funciones $D_i v, i=1,2,3$, son armónicas en el exterior de $\varphi_0(S^2)$, regulares en el infinito y verifican (2.23) con $f=0$; es decir, son soluciones no triviales del problema homogéneo lineal (vectorial) de Molodensky. Así pues, si T_p es una solución particular de (2.12) y $\underline{c} = (c_i), i=1,2,3$, un vector de constantes arbitrarias, la función

$$\hat{T} = T_p + \sum_{i=1}^{3} c_i D_i v$$

es también solución de (2.12). Este hecho confirma la invarianza del problema de Molodensky vectorial por traslaciones arbitrarias en el caso $\omega=0$. En efecto, según (2.7) la solución $\hat{T}$ da como segunda aproximación a la figura de la Tierra

$$\hat{\varphi} = \varphi_0 + (M_v^{-1}\circ\varphi_0)\left[\Delta\bar{g} - \nabla T_p\circ\varphi_0\right] - (M_v^{-1}\circ\varphi_0)(M_v\circ\varphi_0)\underline{c} =$$

$$= \varphi_p - \underline{c}$$

con φ_p segunda aproximación obtenida a partir de T_p .

En el caso real ($\omega \neq 0$), las funciones

$$D_i v = D_i v_g + \omega^2 x_i \quad , \quad i = 1,2$$

son armónicas en Ω_{φ_0} , verifican (2.23) con $f = 0$ pero no son regulares en el infinito (ni siquiera acotadas). Sin embargo, $D_3 v = D_3 v_g$ sigue siendo solución del problema homogéneo lineal (vectorial) de Molodensky, de tal forma que si T_p es alguna solución particular de (2.12) las funciones

$$\hat{T} = T_p + c D_3 v \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

son también solución. Analogamente al caso anterior, tenemos

$$\hat{\varphi} = \varphi_0 + (M_v^{-1} \circ \varphi_0)\left[\overline{\Delta g} - \nabla(c D_3 v) \circ \varphi_0\right] =$$

$$= \varphi_p - c\, \underline{e}_3$$

confirmando la invarianza por traslaciones arbitrarias a lo largo del eje X_3 del problema de Molodensky vectorial en el caso general.

Obviamente, los comentarios anteriores no dicen nada acerca del número exacto de soluciones linealmente independientes no triviales del problema homogéneo en ambos casos.En efecto, con este primer análisis solo podemos concluir que es ≥ 3 si $\omega = 0$ y ≥ 1 si $\omega \neq 0$.

Por lo que respecta al problema simple de Molodensky (y por consiguiente al problema de Stokes como caso particular), se puede afirmar que el número de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo es exactamente tres (Krarup, 1973). En efecto, Proposición 2.2

Los armónicos esféricos de primer grado $Y_{1i} = \frac{x_i}{r^3}$, $i = 1,2,3$, generan el núcleo del problema simple de Molodensky.

Demostración

Si T es armónica en Ω_{φ_0} , también lo es la función $2T + r\frac{\partial T}{\partial r}$ (Pick et al., 1973). De este modo, el problema simple de Molodensky es equivalente a la resolución en el espacio de las funciones armónicas regulares en Ω_{φ_0} de la ecuación diferencial

$$2T + r\frac{\partial T}{\partial r} = u' \quad \text{en} \quad \Omega_{\varphi_0}$$

con u' la (única) solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{en} \quad \Omega_{\varphi_0} \\ u' = f & \text{sobre} \quad \varphi_0(S^2) \\ u' = O(r^{-1}) \ , & r \to \infty \ . \end{cases}$$

Así pues, el nucleo del problema simple de Molodensky coincide con el núcleo del operador

$$T \longrightarrow 2T + r\frac{\partial T}{\partial r}$$

definido en el espacio de las funciones regulares armónicas en Ω_{φ_0}.

Consideremos el armónico esférico sólido de grado n ,

$$T_n = \frac{1}{r^{n+1}} Y_n$$

el cual es una función homogénea de grado $-(n+1)$. Según la relación de homogeneidad de Euler

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial T_n}{\partial x_i} = -(n+1)T_n$$

y entonces

$$2T_n + r\frac{\partial T_n}{\partial r} = -(n-1)T_n .$$

De este modo, vemos que el operador definido tiene autovalores $\lambda_n = -(n-1), n=0,1\ldots$, y para cada λ_n, $(2n+1)$ autosoluciones linealmente independientes correspondiendo a los $(2n+1)$ armónicos sólidos de grado n linealmente independientes.

Por último, en virtud del teorema de Runge (Moritz, 1980) las funciones T_n generan el espacio de las funciones armónicas sobre Ω_φ y por consiguiente, no pueden existir otros autovalores y autosoluciones. De ésto se deduce, que para $n=1$ las únicas soluciones armónicas de $2T + r\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ son $Y_{1i} = \frac{x_i}{r^3}$, $i=1,2,3$.

Acompañando a este resultado, Hörmander (1976) ha demostrado que en el caso más general de considerar como potencial de referencia el de una esfera de nivel con pequeña rotación [2], el espacio de funciones armónicas regulares verificando la condición de contorno homogénea de Stokes es de <u>dimensión uno</u>. Hay que observar, que este resultado ha pasado bastante desapercibido en la literatura usual sobre el problema de Molodensky vectorial.

A efectos de romper esta indeterminación en la solución, tanto a nivel del problema no lineal como del problema lineal impondremos, como se hizo en la sección 1.2, que el origen del sistema de referencia sea el centro de masas terrestre. De este modo el problema de Molodensky vectorial se formula en los términos (1.14a,b; 1.15).

Con esta formulación, y teniendo en cuenta(2.1), tenemos para el potencial perturbador T (resp. $\dot{u}$) un desarrollo asintótico de la forma

$$T(x) = \frac{\delta\alpha}{r} + O(r^{-3}) \quad , \quad r \to \infty \qquad (2.24$$

con $\delta\alpha = \alpha_u - \alpha_v$. Así pues, el problema lineal (vectorial) de Molo ensky se transforma en

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \Omega_{\varphi_0} \\ T\circ\varphi_0 + \langle h\circ\varphi_0 , \nabla T\circ\varphi_0 \rangle = f & \text{sobre } S^2 \\ T(x) = \dfrac{\delta\alpha}{r} + O(r^{-3}) & , \; r \to \infty . \end{cases} \tag{2.25}$$

Uno de los resultados más importantes referentes al proble-
a (2.25) es el teorema de unicidad para el problema homogéneo
($f \equiv 0$) obtenido por Hörmander (1976) :

Teorema 2.3

Sea T solución de (2.25) con $f \equiv 0$. Supongamos que la suma
e los ángulos que el campo isocenital h forma con $g(x) = \underline{x}$ y con
a normal exterior $\underline{n}_0$ de $\varphi_0(S^2)$ es $\frac{\pi}{2} - \delta$ con $\delta > 0$ en todo punto de
(S^2). Sea γ un número positivo $< Q^{-1} |\varphi| \operatorname{sen}(\delta\circ\varphi_0)$ sobre S^2,
onde Q es la medida de la cuasiconformidad de φ_0 definida por

$$Q = \sup\{ \|\varphi' t_1\| / \|\varphi' t_2\| \}$$

on t_1 y t_2 vectores unitarios tangentes a la esfera unidad en
 punto considerado.

Sean γ_0 y γ^* cantidades positivas tales que $\gamma_0 < \gamma$, $\gamma^* > 2$, y
efinamos $\{a_n\}$ por

$$a_n = \gamma^* + \gamma_0 (n^2 + n + 1) - \gamma n(n+1) \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\gamma n(n+1) < \gamma^* + \gamma_0 (n^2 + n + 1)$$

$a_n \equiv 0$ en caso contrario.

Sea $\varepsilon = Q^{-2}(|g| \operatorname{sen}\delta - \gamma Q)$ y

$$R_0 = \max\left(0 , \left\{ \varepsilon^{-1}\left(8 g_n^2 \left| h_t/h_n - g_t/g_n \right|^2 + |h_t|^2/2 \right) + (4 g_n - 2 h_n) \right\} h_n^{-2} \frac{dS}{d\sigma} - \gamma^* \right)$$

$$R_1 = \left| \frac{dS}{d\sigma} - 1 \right| , \quad R_2 = 2 \left| 1/h_n - 1 \right| \frac{dS}{d\sigma} \quad . \quad R_3 = (\pi/2) |\varphi_0(\sigma) - \sigma|$$

$$R_4 = |n_0 - g| \frac{dS}{d\sigma}$$

con (h_t , g_t), (h_n , g_n) componentes tangencial y normal de h y g respectivamente, y

$$\frac{dS}{d\sigma} = |\varphi| \sec(\beta \circ \varphi)$$

la razón entre elementos correspondientes de área de $\varphi_0(S^2)$ y S^2 donde β representa la inclinación del terreno.

Por último, sea A una constante tal que $A^{-1} \leqslant |\varphi| \leqslant A^{1/3}$.

Entonces $T = 0$ si para algún $p \in (1.2)$, $q \in (1, \infty)$ se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_0 > {} & q'^{1/q} \left(\int_{S^2} R_0^q \, d\sigma' \right)^{1/q} + \\ & + 2 \left(\sum_{n \neq 1} A^{2n+4} (2n+1)(n-1)^{-2} a_n + A^6 a_1/3 \right) \int_{\varphi_0(S^2)} Q \, |h_t/h_n|^2 \frac{dS}{4\pi} + \\ & + (p'/2)^{\frac{2}{p}-1} \left\{ \sum_{n \neq 1} A^{2n+4} (4n+2) \, a_n \left[\int_{S^2} \left(R_1 + R_2/|n-1| + (n+1) R_3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (n+1) R^4/|n-1| \right)^p d\sigma' \right]^{\frac{2}{p}} + 2A^6 a_1/3 \left(\int_{S^2} (3R_1 + R_2 + 3R_3 + R_4)^p d\sigma' \right)^{2/p} \right\} \end{aligned} \qquad (2.26)$$

donde $d\sigma' = \frac{d\sigma}{4\pi}$ y (p', q') son los conjugados de Hölder de (p, q),

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \quad , \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1 \; .$$

<u>Demostración</u> (Hörmander, 1976)

Todos los parámetros que intervienen en el teorema anterior dependen directamente de las propiedades de la topografía del Teluroide; con adecuadas elecciones de γ , γ_0 , γ^* , a_0 , a_1 , A , p y q , Hörmander muestra que la condición (2.26) se verifica para cualquier topografía con inclinaciones $\leqslant 3^\circ$ o con inclinaciones $> 3^\circ$ pero menores que 60° siempre y cuando no se presenten con demasiada frecuencia.

Por lo que respecta a la demostración del teorema 2.3, nos limitaremos a analizar el caso más sencillo que se puede presentar: el problema de Stokes (2.14) incluyendo el comportamiento asintótico (2.24). Además, el análisis de este problema es la base para la demostración en el caso más general.

El punto de partida es la identidad (Hörmander, 1976)

$$2 D_j u \cdot \Delta u = \sum_{k=1}^{3} D_k w_{jk} \qquad j = 1,2,3 \tag{2.27}$$

donde

$$w_{jk} = 2 D_j u \, D_k u - \delta_{jk} \sum_{i=1}^{3} (D_i u)^2 \qquad j,k = 1,2,3 \tag{2.28}$$

y δ_{jk} es el símbolo de Kronecker.

Si $g = (g_1, g_2, g_3)$ es un C^1 campo de vectores, de (2.27) obtenemos

$$2 \langle g, \nabla u \rangle \Delta u = \sum_{k=1}^{3} D_k \Big(\sum_{j=1}^{3} g_j w_{jk} \Big) - \sum_{k,j=1}^{3} w_{jk} D_k g_j . \tag{2.29}$$

Supongamos que u es armónica en Ω_{φ_0}, regular en el infinito y de clase C^1 hasta $\varphi_0(S^2)$; además, sea $g = \underline{x}$ para valores grandes de $|\underline{x}|$. En este caso, aplicando el teorema de la divergencia se obtiene

$$\int_{\Omega_{\varphi_0}} \sum_{k,j=1}^{3} w_{jk} D_k g_j \, dx + \int_{\varphi_0(S^2)} \sum_{k,j=1}^{3} w_{jk} g_j n_{0k} \, dS = 0 \tag{2.30}$$

Si $\varphi_0(S^2) = S_R^2$ y $g = \underline{x}$, entonces $D_k g_j = \delta_{jk}$, $\underline{n}_0 = \frac{\underline{x}}{R}$,

$$\sum_{k,j=1}^{3} w_{jk} \delta_{jk} = - |\nabla u|^2$$

$$\sum_{k,j=1}^{3} w_{jk} x_j \left(\frac{x_k}{R} \right) = R \left(u_r^2 - |\nabla_\sigma u|^2 \right)$$

donde con u_r y $\nabla_\sigma u$ hemos designado la derivada radial de u y la componente tangencial de ∇u sobre S_R^2 . Así pues, con $R=1$, (2.30) se convierte en este caso particular en

$$-\int_{|x|>1} |\nabla u|^2 dx + \int_{S^2} (u_r^2 - |\nabla_\sigma u|^2)\, d\sigma = 0 \qquad (2.31)$$

y entonces

$$\int_{S^2} \left(|\nabla_\sigma u|^2 - u_r^2\right) d\sigma \leqslant 0 \qquad (2.32)$$

desigualdad que es válida para toda función armónica en el exterior de $\varphi_0(S^2)$ y regular en el infinito.

Si la función u es el potencial perturbador, puesto que sobre S^2 verifica $2T+T_r=0$, sustituyendo en (2.32) obtenemos

$$\int_{S^2} \left(|\nabla_\sigma T|^2 - 4T^2\right) d\sigma \leqslant 0\ . \qquad (2.33)$$

Supongamos para T un desarrollo en armónicos esféricos sobre S^2

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta,\lambda)$$

donde T_n designa el armónico de superficie de grado n .

El operador de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\sigma$$

donde Δ_σ viene dado por

$$\Delta_\sigma = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ .$$

El operador Δ_σ es simétrico en $L^2(S^2)$ y le corresponde la forma cuadrática (Mikhlin, 1965)

$$\langle \Delta_\sigma f, f \rangle = -\int_{S^2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2 \right] d\sigma = -\int_{S^2} |\nabla_\sigma f|^2 d\sigma \qquad (2.34)$$

con $f \in L^2(S^2)$.

Por otra parte, es bien conocido que

$$\Delta_\sigma T_n = -n(n+1) T_n \ .$$

Así pues, según (2.34) con $f = T$ y aprovechando la ortogonalidad entre armónicos esféricos de superficie, tenemos

$$\int_{S^2} |\nabla_\sigma T|^2 d\sigma = -\sum_{n=0}^{\infty} \langle \Delta_\sigma T_n , T_n \rangle_{L^2(S^2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \| T_n \|^2_{L^2(S^2)} \ .$$

Además

$$\int_{S^2} T^2 d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \| T_n \|^2_{L^2(S^2)}$$

Si sustituimos en (2.33) las dos últimas expresiones obtenidas, tenemos finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n+1) - 4 \right] \| T_n \|^2_{L^2(S^2)} \leq 0 \ .$$

Observando que los coeficientes de la serie anterior son positivos para $n > 1$, se deduce que $T_n = 0$ para todo n si y solo si $T_0 = T_1 = 0$. Para $n = 1$, la condición asintótica en el infinito implica que $T_1(\theta, \lambda) = 0$. Por último, según la fórmula de Green

$$\int_{|x|>1} (w \Delta v - v \Delta w) dx = \int_{S^2} \left(w \cdot \frac{dv}{d\underline{n}} - v \frac{dw}{d\underline{n}}\right) d\sigma$$

con $v = T$ y $w = \frac{1}{r}$, obtenemos

$$0 = \int_{|x|=1} -(T_r + T)\,d\sigma = \int_{|x|=1} T\,d\sigma$$

y por consiguiente $T_0(\phi,\lambda) \equiv 0$.

De esta forma se demuestra que la única solución del problema homogéneo de Stokes es la sclución trivial $T = 0$.

En la proposición 2.4 presentamos una demostración más sencilla e inmediata de este resultado por aplicación directa de desarrollo en armónicos esféricos. Sin embargo, lo expuesto en los párrafos anteriores es la clave para la demostración del teorema 2.3. En efecto, la identidad integral (2.31) no es muy sensible a perturbaciones de la configuracón esférica y del campo de vectores h . La idea de Hörmander es aprovechar la identidad general (2.30), junto con una adecuada estimación para las componentes de bajo orden en el desarrollo en armónicos esféricos de $T_0\varphi_0$.

La condición asintótica (2.24) restringe $T_0\varphi_0$ a un espacio de codimensión tres. Según esto y la alternativa de Fredholm, si admitimos las condiciones expuestas en el teorema 2.3 se sigue que el problema de contorno (2.25) tiene solución única regular si y solo si el dato f verifica tres condiciones linealmente independientes.

En el caso de Stokes es sencillo establecer las tres condiciones que f debe verificar:

Proposición 2.4

El problema de Stokes (2.14) junto con la condición de contorno (2.24), tiene solución única si y solo si f no tiene armónicos de primer grado en su desarrollo en armónicos esféricos de superficie.

Demostración

Supongamos para T un desarrollo en armónicos esféricos sólidos de la forma

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (R/r)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)$$

y sea

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta,\lambda)$$

el desarrollo en armónicos esféricos de superficie de f (esto es posible, si al menos $f \in L^2(S^2)$; véase Mikhlin, 1965).

Derivando con respecto del radio vector la expresión de T, obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} T_n(\theta,\lambda) \ .$$

Así pues, introduciendo los anteriores desarrollos en la condición de contorno de Stokes, tenemos la siguiente relación entre los armónicos esféricos de T y los de f

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-n) T_n(\theta,\lambda) = 2\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta,\lambda)$$

es decir

$$(1-n) T_n = 2 f_n \quad , \quad n \geq 0 \ .$$

Observando la singularidad de la expresión anterior cuando $n = 1$, concluimos que el problema de Stokes tendrá solución si y solo si $f_1 \equiv 0$. Tal solución (no única) viene dada por

$$T = 2\frac{R}{r} f_0 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 Y_1(\theta,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2}{1-n} f_n(\theta,\lambda)$$

donde $Y_1(\theta,\lambda)$ es cualquier armónico esférico de superficie de primer grado.

Imponiendo la condicón asintótica (2.24) se tiene necesariamente que $Y_1 \equiv 0$, y entonces la única solución del problema de Stokes sin componente armónica de primer grado en el infinito es

$$T = 2\frac{R}{r} f_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{2}{1-n} f_n(\theta,\lambda). \qquad (2.35)$$

2.3 TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA DE NASH-HÖRMANDER

Comenzamos esta sección definiendo los espacios de Hölder, marco funcional en el cual está formulado el teorema de Nash-Hörmander; para su definición seguiremos a (Hörmander, 1976; Apéndice A).

Sea B un conjunto compacto, convexo y con puntos interiores en $\mathbb{R}^n$ y $0<\alpha\leq 1$; una función u continua en B se dice que es α -hölder continua en B si

$$|u|_\alpha = \sup_{x,y\in B}\left\{ |u(x)-u(y)| / |x-y|^\alpha \right\} < +\infty \quad .$$

Sea ahora $k<a\leq k+1$ donde k es un entero no negativo; el espacio de Hölder $H^a(B)$ se define como el subespacio de $C^k(B)$ de todas las funciones cuyas derivadas parciales de orden k son $(a-k)$ -hölder continuas en B . Con esta notación se observa que si a es un entero se tiene que $H^a(B)\neq C^a(B)$. Si a no es un entero, e.d $a=k+\alpha$ con $\alpha\in(0,1)$, preferiremos en algunos casos (concretamente en las secciones 2.4 y 3.3) la notación más usual $C^{k+\alpha}$ para designar a dichos espacios. Si $a=0$, $H^0(B)$ designará $C^0(B)$.

En estas condiciones, el espacio $H^a(B)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_a = \sup|u| + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{a-k} \ .$$

Además $H^a \subset H^b$ si $a>b$; si $u=(u_1,\ldots,u_k)$, escribiremos $\|u\|_a=\sum_{i=1}^{k}\|u_i\|_a$.

Las principales propiedades de estos espacios las hemos recogido en el Apéndice de este trabajo.

Los lemas A.2 y A.3 permiten definir $H^a(M)$ donde M es cualquier variedad compacta C^∞ (con frontera). Esto puede conseguirse recubriendo M mediante "entornos coordenados" M_j y considerando una adecuada partición de la unidad $\sum_j \chi_j$ con $\chi_j\in C_0^\infty(M_j)$. Una función u definida sobre M se dice entonces que pertenece a $H^a(M)$ si $\chi_j u$ pertenece a H^a para cada j considerada como función de las coordenadas locales, y escribiremos $\|u\|_a=\sum_j\|\chi_j u\|_a$.

De esta forma queda perfectamente definido $H^{s}(S^2)$.

Consideremos la formulación (1.14a,b ; 1.15) del problema de Molodensky vectorial. Como ya indicabamos en el Capítulo 1, se observa que la ausencia de armónicos de primer grado $x_j/|x|^3$ en el comportamiento asintótico de u en el infinito, restringe $W \circ \varphi$ a un espacio de codimensión tres; esto es, si φ es conocida W_s deberá verificar tres condiciones linealmente independientes de compatibilidad. En este caso, $\underline{g}_s$ puede no estar bien definido como funcional de W_s y φ por medio del problema de Dirichlet (1.16).

En estas condiciones, se hace necesario modificar la noción de solución del problema de Molodensky vectorial.

Sea φ_0 un cierto Teluroide asociado a un potencial referencia $v \in C^\infty(S^2)$, y designemos por W_0 y $\underline{g}_0$ el valor de v y de su gradiente sobre $\varphi_0(S^2)$ respectivamente, es decir

$$W_0 := v \circ \varphi_0$$

$$\underline{g}_0 := \nabla v \circ \varphi_0 .$$

Supongamos que el campo isocenital asociado a v no es en ningún punto de $\varphi_0(S^2)$ tangente a la superficie y que las condiciones del teorema 2.3 se verifican. Como ya hemos visto en la Secc. 2.2, estas hipótesis implican que el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en} \quad \Omega_{\varphi_0} \\ T\circ\varphi_0 + \langle \nabla T\circ\varphi_0 , h\circ\varphi_0 \rangle = f & \text{sobre} \quad S^2 \\ T(x) = \dfrac{\delta\alpha}{r} + O(r^{-3}) \quad , & r = |x| \to \infty \end{cases}$$

tiene una única solución para todo f verificando tres condiciones linealmente independientes (en el caso de Stokes, ausencia de los tres armónicos esféricos de superficie).

A fin de modificar el dato W_s haciéndolo compatible con el comportamiento de u en el infinito, Hörmander (1976) introduce tres funciones $A_1, A_2, A_3 \in C^\infty(S^2)$ de tal modo que los armónicos de primer grado de las soluciones de los problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{en } \Omega_{\varphi_0} \\ u_j \circ \varphi_0 = A_j & \text{sobre } S^2 \quad , \quad j=1,2,3 \\ u_j \to 0 \quad , \quad r \to \infty & \end{cases} \tag{2.36}$$

sean linealmente independientes.

Sea $\varepsilon > 0$. El problema de Molodensky vectorial se plantea ahora localmente en los términos definitivos siguientes:

" dados W_s y $\underline{g}_s$, próximos a W_0 y $\underline{g}_0$ en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$, encontrar una inmersión φ de la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ próxima a φ_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$ y constantes a_1, a_2, a_3 próximas a cero, tales que

$$\text{(i)} \quad W \circ \varphi = W_s - \sum_{j=1}^{3} a_j A_j \tag{2.37}$$

$$\text{(ii)} \quad \nabla W \circ \varphi = \underline{g}_s$$

donde W viene definido por

$$\text{(iii)} \quad W(x) = u(x) + \frac{1}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

para alguna función u armónica en Ω_φ y verificando

$$\text{(iv)} \quad u(x) = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) \; , \; r \to \infty \; , \alpha_u \in \mathbb{R}^+$$ " (Hörmander, 1976).

La nueva formulación del problema de Molodensky vectorial, tiene la ventaja de que ahora $\underline{g}_s$ es un funcional bien definido de W_s y φ con W_s, φ próximos a W_0, φ_0. En efecto, consideremos los problemas de contorno tipo Dirichlet siguientes:

$$\begin{cases} \Delta u_j^{\varphi} = 0 & \text{en } \Omega_{\varphi} \\ u_j^{\varphi} \circ \varphi = A_j & \text{sobre } S^2 \qquad j = 1,2,3 \\ u_j^{\varphi} \longrightarrow 0 \ , & |x| \longrightarrow \infty \ . \end{cases} \tag{2.38}$$

Si φ es próximo a φ_0 en $H^{2+\varepsilon}$, los armónicos esféricos de primer grado de u_j^{φ} son próximos a los de u_j y por consiguiente generan todos los armónicos de primer grado. Así pues, podemos encontrar unas únicas constantes $\{a_j\}$, $j = 1,2,3$, de tal forma que la (única) solución del problema exterior de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{en } \Omega_{\varphi} \\ u' \circ \varphi = W_s - \frac{1}{2}\omega^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ u' \longrightarrow 0 \ , & |x| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{2.39}$$

pueda descomponerse en la forma

$$u' = u + \sum_{j=1}^{3} a_j u_j^{\varphi} \tag{2.40}$$

con u sin componente armónica de primer grado en el infinito.

Definamos ahora el operador Γ de la manera siguiente:

$$\Gamma(W_s, \varphi) = \nabla W \circ \varphi$$

donde $W = u + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$

$$u = u' - \sum_{j=1}^{3} a_j u_j^{\varphi}$$

siendo $\{u_j^{\varphi}\}$ y u' las soluciones de (2.38) y (2.39) respectivamente. Con las observaciones anteriores, resulta claro que el operador Γ está <u>bien definido</u> cualquiera que sea W_s y φ .

De este modo, el problema (modificado) de Molodensky vectorial se reduce a la resolución de la ecuación funcional

$$\Gamma(W_s, \varphi) = \underline{g}_s \tag{2.41}$$

En efecto, si $\varphi \sim \varphi_0$ es solución de la ecuación anterior, tenemos

$$W \circ \varphi = u' \circ \varphi - \sum_{j=1}^{3} a_j A_j + \frac{1}{2}\omega^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = W_s - \sum_{j=1}^{3} a_j A_j$$

con $\underline{a} = \{a_j\}$ próximo a $\underline{0}$ si $W_s \sim W_0$.

La derivada de Fréchet del nuevo operador Γ en (W_s, φ) , en la dirección $(\dot{w}_s, \dot{\varphi})$ es ahora (cfr. 2.16)

$$\Gamma'(W_s, \varphi)(\dot{w}_s, \dot{\varphi}) = \nabla \dot{u} \circ \varphi + (M_W \circ \varphi)\dot{\varphi}$$

donde $\dot{u}$ es armónica en Ω_φ , no tiene componente armónica de primer grado en el infinito y verifica sobre S^2

$$\dot{u} \circ \varphi = \dot{w}_s - \langle \underline{g}_s, \dot{\varphi} \rangle - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j . \tag{2.42}$$

Para la inversa de la primera diferencial sigue siendo válida la fórmula (2.19), con $\dot{u}$ solución del problema lineal (vectorial) de Molodensky <u>modificado</u>

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ \dot{u} \circ \varphi + \langle \nabla \dot{u} \circ \varphi, h \circ \varphi \rangle = \dot{W}_s + \langle h \circ \varphi, \underline{g}_s \rangle - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u} = \dfrac{\alpha_{\cdot}}{r} + O(r^{-3}) & , \ r \to \infty . \end{cases} \tag{2.43}$$

Como es usual, en (2.41), (2.42) $\dot{a}_j$ representa la derivada de a_j con respecto de θ .

La ventaja de la introducción de las constantes $\{a_j\}$ es doble:

(i) permite modificar el dato W_s haciéndolo compatible con las tres condiciones impuestas sobre el potencial gravitatorio (ausencia de armónicos de primer grado);

(ii) la elección de las funciones A_1, A_2, A_3 garantiza, según la proposición 2.7, que dados $\dot{w}_s$ y $\dot{\underline{g}}_s$ <u>arbitarios</u> se puede encontrar de manera única constantes $\{\dot{a}_j\}$, de tal modo que el problema (2.42) tenga una única solución $\dot{u}$ (o T , con la analogía ya indicada).

Esta última aserción garantiza la invertibilidad de la primera diferencial del operador Γ , al menos en un entorno de (w_0, φ_0) .

En vista de la mencionada pérdida de diferenciabilidad del operador $[\Gamma'(w_0,\varphi)]^{-1}$ (que sigue ocurriendo aun después de modificar el problema), la idea de **Hörmander** (1976), despues de analizar cuidadosamente el problema lineal (vectorial) de Molodensky, es establecer y aplicar un teorema de la función implícita de tipo Nash-Moser a fin de resolver la ecuación funcional (2.41).

Antes de enunciar el teorema de la función implícita obtenido por Hörmander, y que denominaremos de **Nash-Hörmander**, describiremos brevemente la idea básica denominada de Nash-Moser (**Niremberg**, 1981).

Sea F un operador suave de un espacio de Banach X a otro Y , con

$$F(x_0) = y_0 \quad , \quad x_0 \in X \, , \; y_0 \in Y \, .$$

La cuestión es estudiar el conjunto de soluciones próximas a x_0 de la ecuación

$$F(x) = y \qquad \text{con } y \text{ próximo a } y_0 \, .$$

Suponiendo que $F'(x_0)$ es invertible, la idea clásica es construir una sucesión de soluciones aproximadas (método de aproximaciones sucesivas) por medio del esquema de iteración de Picard

$$x_{p+1} = x_p + [F'(x_0)]^{-1}(y - F(x_p)) \quad , \quad p = 0,1,\dots$$

que converge como una serie geométrica. Si $[F'(x)]^{-1}$ existe en un entorno de X_0 , el esquema de Newton es

$$x_{p+1} = x_p + [F'(x_p)]^{-1}(y - F(x_p)) \quad , \quad p = 0,1,\dots$$

Este esquema converge mucho más rapidaménte que el esquema de Picard.

En el caso en que el operador $[F'(x)]^{-1}$ "pierda derivadas", como ocurre en el problema de Molodensky vectorial, la aproximación x_{p+1} es menos regular que x_p sin posibilidad de convergencia en un espacio de funciones con alguna regularidad prescrita a priori. Este hecho motiva la introducción de un proceso paralelo de <u>suavización</u>, teniendo en cuenta que el grado de suavidad debe ser progresivamente reducido a fin de obtener en el límite el grado de regularidad deseado.

Este proceso se realiza usualmente mediante la introducción de una serie de operadores regularizantes S_θ dependiendo de un parámetro θ , verificando

$$\|S_\theta u\|_b \leq C\,\theta^{b-a}\|u\|_a \qquad a<b$$

$$\|S_\theta u\|_b \leq C\,\|u\|_a \qquad b\leq a$$

$$\|u-S_\theta u\|_b \leq C\,\theta^{b-a}\|u\|_a \qquad b\leq a$$

con $u\in H^a$ y a , b no negativos y acotados. Posibles construcciones de este tipo de operadores se presentan en (**Hörmander**, 1976) y (**Moser**, 1961).

Definida una adecuada sucesión $\{\theta_k\}$, se trabaja entonces con un esquema de Newton modificado de la forma

$$x_{p+1} = x_p + S_{\theta_p}[F'(x_p)]^{-1}(y-F(x_p)).$$

El error introducido por los operadores S_θ se compensa por la rápida convergencia del método de Newton. El esquema de iteración de Hörmander es algo más complejo pero la idea básica es análoga (véase, **Moritz**, 1977;en este trabajo, de forma muy asequible, se analiza con detalle dicho esquema).

Veamos ahora cual es la clase de operadores admisibles sobre los cuales actúa el teorema de la función implícita de Nash-Hörmander. Sea M una variedad compacta C^∞, $u_0 \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ y Φ un operador de $C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ a $C^\infty(M,\mathbb{R}^m)$ definido en un H^μ ($\mu \geq 0$) entorno convexo V de u_0. Consideremos las siguientes hipótesis:

(a) para cualquier $v \in V \cap C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, la primera diferencial tiene inversa por la derecha $\psi(v)$ verificando

$$\|\psi(v)g\|_{\mu_1+a} \leq C\{\|g\|_{\lambda_1+a} + \|g\|_{\lambda_2}\|v\|_{\mu_2+a}\} \quad , \quad 0 \leq a \leq a_\psi \tag{2.44}$$

para todo $g \in C^\infty(M,\mathbb{R}^m)$ y λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, a_ψ constantes no negativas;

(b) para cualquier $u \in V \cap C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, la segunda diferencial verifica

$$\|\Phi''(u;v,w)\|_{\lambda_0+a} \leq C\{\|v\|_{m_1+a}\|w\|_{m_2} + \|v\|_{m_2}\|w\|_{m_1+a} + (\|v\|_{m_3}\|w\|_{m_4} + \|v\|_{m_4}\|w\|_{m_3})\|u\|_{m_5+a}\} \quad , \quad 0 \leq a \leq a_\Phi \tag{2.45}$$

para todo $v, w \in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ y $\lambda_0, m_1 \ldots m_5, a_\Phi$ constantes no negativas.

Sea $f \in H^{\alpha+\lambda_1}(M,\mathbb{R}^n)$ en un pequeño entorno del origen. Con las condiciones supuestas (2.44), (2.45), el teorema de Nash-Hörmander establece condiciones suficientes sobre α y las constantes que aparecen en (2.44), (2.45) que garantizan la existencia de una sucesión $\{u_k\}$ (construida según el esquema de iteración de Hörmander) convergente a $u \in H^{\alpha+\mu_1}(M,\mathbb{R}^n)$ en la H^a topología cuando $a < \alpha+\mu_1$ y tal que $\Phi(u_k) \to \Phi(u_0) + f$.

Si Φ puede extenderse de manera contínua de $H^a(M,\mathbb{R}^n)$ a $H^0(M,\mathbb{R}^m)$, para algún $a < \alpha+\mu_1$, se tiene entonces

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f.$$

Esta última observación es importante, pues ésto es lo que ocurre tanto en el problema de Molodensky vectorial como en el escalar (Cap. 3).

Utilizemos la siguiente notación (idéntica a la de Hörmander)

$M_j = m_j - \mu_1 \quad , \; j = 1 \cdots 5$

$\Lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j-1} \quad , \; j = 1,2$

$M = \mu_2 - \mu_1 \, .$

<u>Teorema 2.5 (Existencia)</u>

Sea cualquier α verificando

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a_\psi > \alpha \, , \; a_\psi > \Lambda_1 + \alpha + \max(M_1, M_5) \\ & a_\psi > \max(M_1, \dots, M_5) \, , \; a_\phi > \Lambda_1 + \alpha \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \alpha > \max(0, M_1+\Lambda_1, \Lambda_2, M_1+\Lambda_1+\Lambda_2, M_1+M_2+\Lambda_1, M_1, M_2, M_3, M_4) \\ & \alpha \geq \Lambda_2 + M \, , \quad \alpha \geq \mu - \mu_1 \\ & 2\alpha > M + \max(M_1, M_2, M_3, M_4, M_1+M_2, M_3+M_4) \\ & 2\alpha > M_3 + M_4 + M_1 + \Lambda_1 \\ & 2\alpha > M_5 + \Lambda_1 + \max(M_3, M_4, M_3+M_4, \max(M_3, M_4) + \Lambda_2) \\ & 2\alpha > \max(M_3, M_4) + M_5 \\ & 3\alpha > \max(M_3, M_4, M_3+M_4) + M_5 + M \end{aligned} \tag{2.47}$$

(iii) $\alpha + \mu_1$ no es entero.

Entonces, existe un entorno W del origen en $H^{\alpha+\lambda_1}$ tal que para todo $f \in W$ se puede construir una sucesión $u_k \in V \cap C^\infty$ con las siguientes propiedades

(iv) cuando $k \to \infty$, $\{u_k\}$ converge a $u(f) \in H^{\alpha+\mu_1}$ en la H^a topología para todo $a < \alpha + \mu_1$ y es acotada en $C^{\alpha+\mu_1}$;

(v) $\phi(u_k) \to \phi(u_0) + f$ en H^a para todo $a < \alpha + \lambda_1$ y es acotada en $H^{\alpha+\lambda_1}$;

(vi) $\|u(f)-u_0\|_{\alpha+\mu_1} \to 0$ si $f \to 0$ en $H^{\alpha+\lambda_1}$;

(vii) si $f \in H^{\beta+\lambda_1}$ para algún $\beta \geq \alpha$ tal que (2.46) se verifica con α reemplazado por β , entonces $u(f) \in H^{\beta+\mu_1}$ si $\beta+\mu_1$ no es entero y $u_k \to u(f)$ en H^a cuando $a < \beta+\mu_1$. Además,

$\phi(u_k) \to \phi(u_0) + f$ en H^a cuando $a < \beta+\lambda_1$.

- Demostración (Hörmander, 1976)

Para el teorema de unicidad la condición (a) de las hipótesis generales se reemplaza por

(a') para cualquier $v \in \mathcal{V} \cap C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$, la primera diferencial tiene inversa por la izquierda $\psi(v)$ verificando (2.44) con $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$.

El teorema 2.6, establece las condiciones bajo las cuales hay unicidad de límite de las sucesiones $\{u_k\}$ o unicidad de solución de la ecuación funcional $\phi(u) = \phi(u_0) + f$ cuando se puede extender la definición de ϕ a elementos u que no están en $C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$.

Designemos por $\Phi^{-1}_{\alpha\beta}(f)$ el conjunto de todos los $u \in H^{\alpha+\mu_1}$ para los cuales existe una sucesión $\{u_k\} \in \mathcal{V} \cap C^\infty$ verificando

$$u_k \to u \qquad \text{en} \quad H^{\alpha+\mu_1}$$
$$\Phi(u_k) \to \Phi(u_0) + f \qquad \text{en} \quad H^{\beta+\lambda_1}.$$

El siguiente teorema, establece condiciones suficientes sobre α y β y las constantes que intervienen en (2.44), (2.45), que permiten la selección de un entorno de u_0 en $H^{\alpha+\mu_1}$ que no contenga dos elementos diferentes de $\Phi^{-1}_{\alpha\beta}(f)$. Si Φ admite extensión continua de $H^{\alpha+\mu_1}$ a $H^{\beta+\lambda_1}$ esto equivale, como ya hemos indicado anteriormente, a unicidad de solución de

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + f$$

en dicho entorno.

Teorema 2.6 (unicidad)

Sean α , β cualesquiera, verificando

$$\alpha \geq M, \ \alpha > \max\left(0, M_1 \cdots M_5, M_1 + M_2 + \Lambda_1, \max(M_1, M_5) + \Lambda_1 + \Lambda_2^+\right)$$

$$2\alpha > M_3 + M_4 + \max\left(M_1, \Lambda_1 + \max(M_1, M_5)\right), \ 2\alpha > M + M_1 + M_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)^+$$

$$\alpha + a_\phi > M_3 + M_4 + \Lambda_1 \tag{2.48}$$

$$\alpha + \min(a_\psi, \beta) > \max\left(M_3 + M_4, M_1 + M_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)^+\right)$$

$$\beta > \Lambda_2^+ , \ a_\Phi > \Lambda_1 + \Lambda_2^+$$

con $b^+ = \max(0, b)$.

Entonces, para todo conjunto acotado B en $H^{\alpha+\mu_1}$ se puede encontrar una constante N tal que $\Phi_{\alpha\beta}^{-1}(f) \cap B$ no tiene mas de N elementos y

$$\|u - v\|_0 > 1/N$$

para cualquier par de elementos diferentes.

Demostración (**Hörmander**, 1976)

Observación (Hörmander, 1976).

Las estimaciones (2.44), (2.45) no es necesario obtenerlas para todo a en los intervalos indicados; si son válidas para un conjunto denso de tales puntos, los teoremas anteriores siguen siendo válidos. Esto es importante en la aplicación del teorema de Nash-Hörmander para el estudio del problema de Molodensky vectorial y escalar, para los cuales dichas estimaciones no son válidas para ciertos valores no enteros de a .

A fin de aplicar los teoremas 2.5, 2.6 al estudio del problema de Molodensky vectorial, Hörmander considera el operador

$$\phi(w_s,\varphi) = (\Gamma(w_s,\varphi),\, w_s) \tag{2.49}$$

para φ , w_s suaves y próximas a φ_0 , w_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2;\mathbb{R}^3)\times H^{1+\varepsilon}(S^2;\mathbb{R})$ con $\varepsilon>0$ arbitario. La ventaja de trabajar con este operador, radica en la introducción de los dos datos de contorno en el espacio imagen; de este modo, la ecuación funcional a resolver es

$$\phi(w_s,\varphi) = (\underline{g}_s\,,\, w_s)\,. \tag{2.50}$$

A continuación, presentamos los principales resultados obtenidos por Hörmander (1976) en relación al operador $\phi(w_s,\varphi)$ y que en último término permiten establecer un teorema de existencia y unicidad para el problema (modificado) de Molodensky vectorial.

(A) Inversa de la primera diferencial

La primera diferencial del operador ϕ viene definida por

$$\phi'(w_s,\varphi)(\dot{w}_s,\dot{\varphi}) = \left(\Gamma'(w_s,\varphi)(\dot{w}_s,\dot{\varphi})\,,\,\dot{w}_s\right)$$

siendo su inversa (por la derecha y por la izquierda)

$$\psi(w_s,\varphi)(\underline{g}_s,\dot{w}_s) = \left(\dot{w}_s\,,\,(M_w\circ\varphi)^{-1}[\,\underline{g}_s - \nabla\dot{u}\circ\varphi\,]\right)$$

siempre y cuando el problema de contorno (2.43) admita una única solución. A este respecto el siguiente resultado es esencial

Proposición 2.7

Si φ es suficientemente próxima a φ_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2;\mathbb{R}^3)$ y $t\in H^{1+\varepsilon}(\bar{\Omega}_\varphi)$ verifica

$$\begin{cases} \Delta t = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ t\circ\varphi + \langle \nabla t\circ\varphi, h\circ\varphi\rangle = F + \sum_{j=1}^{3}\alpha_j A_j & \text{sobre } S^2 \\ t = \dfrac{\alpha}{r} + O(r^{-3})\,, \quad r\to\infty \end{cases} \tag{2.51}$$

con $F\in H^{\varepsilon}(S^2)$ y $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ constantes, entonces

$$\|t\circ\varphi\|_{1+\varepsilon}+\sum_{j=1}^{3}|\alpha_j| \leq \|F\|_{\varepsilon} . \qquad (2.52)$$

<u>Demostración</u> (**Hörmander**, 1976)

Esta proposición permite demostrar dos cosas:

(i) si $\alpha_j=0$ y $F=0$, de (2.52) se deduce que $t=0$ en $\bar{\Omega}_\varphi$. Así pues, en virtud de la alternativa de Fredholm, el problema de contorno

$$\begin{cases}\Delta t = 0 & \text{en } \Omega_\varphi \\ t\circ\varphi+\langle\nabla t\circ\varphi, h\circ\varphi\rangle = F & \text{sobre } S^2\end{cases}$$

tiene solución única regular sin componente armónica de primer grado en el infinito, si y solo si F verifica tres condiciones linealmente independientes de compatibilidad, es decir, si pertenece a un espacio de codimensión tres;

(ii) si $F=0$ en (2.51), se deduce de (2.52) que $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, Esto quiere decir que el espacio al que F debe pertenecer no contiene ninguna combinación lineal distinta de cero de A_1 , A_2 , A_3 . Por consiguiente, $H^{\varepsilon}(S^2)$ se expresa como suma directa del rango del problema de contorno con dato F y el subespacio generado por A_1 , A_2 , A_3 . En otras palabras, para cada $F\in H^{\varepsilon}(S^2)$ existe una única t y $\{\alpha_j\}$ con las propiedades supuestas en la proposición 2.7.

Trasladando este resultado al análisis del problema de contorno (2.43), podemos concluir bajo las hipótesis de la proposición anterior que tiene una única solución $\dot{u}$ verificando

$$\|\dot{u}\circ\varphi\|_{1+\varepsilon}+\sum_{j=1}^{3}|\dot{a}_j| \leq C\,\|\dot{W}_s+\langle \underline{g}_s, h\circ\varphi\rangle\|_{\varepsilon} .$$

Así pues el operador $\Phi'(W_s,\varphi)$ es invertible; además, su inversa verifica la siguiente estimación

$$\|\psi(w_s,\varphi)(\dot{\underline{g}}_s,\dot{w}_s)\|_{a+\varepsilon} \leq C\Big\{ (\|\dot{w}_s\|_{a+\varepsilon} + \|\dot{\underline{g}}_s\|_{a+\varepsilon}) + \qquad (2.53)$$
$$+ (\|\dot{w}_s\|_{\varepsilon} + \|\dot{\underline{g}}_s\|_{\varepsilon})(\|w\|_{2+a+\varepsilon} + \|\varphi\|_{2+a+\varepsilon})\Big\}$$

con $a>0$ y $a+\varepsilon \notin \mathbb{Z}$. Con $v=(w_s,\varphi)$ y $g=(\dot{\underline{g}}_s,\dot{w}_s)$, la estimación anterior es del tipo (2.44) con

$$\mu_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon \quad ; \quad \mu_2 = 2+\varepsilon \quad ; \quad a_\psi = \infty .$$

(B) <u>Segunda diferencial</u>

La segunda diferencial $\phi''(w_s,\varphi)$ tiene como componentes

$$\phi''_{\varphi\varphi}(w_s,\varphi) = \Gamma''_{\varphi\varphi}(w_s,\varphi)$$

$$\phi''_{w_s\varphi}(w_s,\varphi) = \Gamma''_{w_s\varphi}(w_s,\varphi)$$

$$\phi''_{w_s w_s}(w_s,\varphi) \equiv 0$$

esto último por la linealidad afín de ϕ con respecto de w_s .

En global, $\phi''(w_s,\varphi)$ verifica (Hörmander, 1976)

$$\|\phi''(w_s,\varphi)(X,Y)\|_{a+2\varepsilon} \leq C_1\Big\{(\|w_s\|_{a+3+2\varepsilon} + \|\varphi\|_{a+3+2\varepsilon})\|X\|_0\|Y\|_0 +$$
$$+ (\|X\|_{a+2+3\varepsilon}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{a+2+3\varepsilon})\Big\} \qquad (2.54)$$

con $0 < a < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \varepsilon$, $a+2\varepsilon \notin \mathbb{Z}$ y

$$X, Y \in C^\infty(S^2,\mathbb{R}) \times C^\infty(S^2,\mathbb{R}^3) .$$

La estimación (2.54) es del tipo (2.45) con

$$\lambda_0 = 2\varepsilon \;,\; m_1 = 2+3\varepsilon \;,\; m_2 = m_3 = m_4 = 0 \;,\; m_5 = 3+2\varepsilon$$

$$a_\phi = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \varepsilon .$$

(C) <u>Estimación de $\phi(w_s,\varphi)$</u>

La posibilidad de extender ϕ a un operador de

$H^{1+a}(S^2,\mathbb{R}) \times H^{1+a}(S^2,\mathbb{R}^3)$ a $H^{a}(S^2,\mathbb{R}^3) \times \bar{H}^{a}(S^2,\mathbb{R})$ viene garantizada por la estimación (Hörmander, 1976)

$$\|(\underline{g}_s, W_s)\|_a \leq C\left(\|W_s\|_{1+a} + \|\varphi\|_{1+a}\right) \tag{2.55}$$

válida para todo $a>0$ y no entero.

Con la colección de constantes de (A) y (B), las condiciones (2.46), (2.47) del teorema de existencia 2.5 se reducen a

$$\alpha < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\alpha > 2+2\varepsilon \tag{2.56}$$

si $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

De igual modo, las condiciones (2.48) se convierten en

$$\alpha > 3+\varepsilon\ ,\ \beta \geq 0\ . \tag{2.57}$$

Establezcamos finalmente el teorema de existencia y unicidad para el problema modificado de Molodensky vectorial

<u>Teorema 2.8</u> (Hörmander, 1976)

Sea $\delta \in (0,1)$ y arbitario.

(i) Para todo W_s , $\underline{g}_s$ en un $H^{2+\delta}$ entorno de W_0 , $\underline{g}_0$ el problema modificado de Molodensky vectorial, admite una solución φ próxima a φ_0 en $H^{2+\delta}$ y (a_1, a_2, a_3) próximas a cero.

(ii) Si W_s , $\underline{g}_s$ están en H^a con $a>2+\delta$ y no entero, entonces $\varphi \in H^a$.

(iii) Se puede encontrar un $H^{3+\delta}$ entorno de φ_0 que no puede contener dos soluciones diferentes del problema.

Demostración

(i) Sea $\delta \in (0,1)$ arbitrario pero fijo, y $\varepsilon = \delta/n$ con $n > 2$. Consideremos el operador ϕ definido en un $H^{2+\varepsilon}$-entorno de w_0, φ_0 para w_s, φ regulares. Dicho entorno es elegido suficientemente pequeño de tal forma que sean válidas las estimaciones (2.53), (2.54) y (2.55). Entonces, en virtud de (2.56) sea cualquier α tal que

$$2 + \frac{2\delta}{n} < \alpha \, , \quad \alpha < 1 + \frac{n}{\delta} \, .$$

Elijamos $\alpha = 2 + \frac{(n-1)}{n}\delta$; es claro que n puede elegirse suficientemente grande de tal modo que las acotaciones anteriores se verifiquen. Además, $\alpha + \mu_1 = \alpha + \lambda_1 = 2 + \delta$ no es entero.

Así pues, según el teorema de existencia 2.5 y la posibilidad de extender ϕ de $H^{1+a} \times H^{1+a}$ a $H^a \times H^a$ para todo $a < 2 + \delta$ y no entero, existe un entorno de $\underline{g}_0$, w_0 en $H^{2+\delta}$ tal que para todo $\underline{g}_s$, w_s perteneciente a este entorno se puede encontrar una inmersión φ verificando $\phi(w_s, \varphi) = (\underline{g}_s, w_s)$.

(ii) Según el resultado (vii) del teorema 2.5, si $w_s, \underline{g}_s \in H^a$ con $a > 2 + \delta$ y $\beta = a - \delta/n$ verifica (2.46), es decir,

$$a - \delta/n < a_{\xi} - \Lambda_1 = 1 + n/\delta \iff a < 1 + n/\delta + \delta/n$$

entonces $\varphi \in H^a$ si a no es entero. Puesto que esto es válido para todo n suficientemente grande se demuestra (ii).

(iii) Claramente, $\alpha = 3 + \frac{(n-1)}{n}\delta$ verifica (2.57). Puesto que

$$\alpha + \mu_1 = 3 + \frac{(n-1)}{n}\delta + \frac{\delta}{n} = 3 + \delta$$

el teorema de unicidad 2.6 nos permite encontrar un $H^{3+\delta}$-entorno de φ_0 con a lo más una solución de $\phi(w_s, \varphi) = (\underline{g}_s, w_s)$.

Observaciones

1. El teorema anterior es de importancia fundamental, pues

históricamente representa el primer resúltado matemáticamente exacto sobre la existencia y unicidad del problema <u>no lineal</u> (vectorial) de Molodensky.

Aunque los resultados obtenidos por Hörmander son demasiado restrictivos desde el punto de vista práctico (proximidad en términos de $H^{2+\delta}$), es necesario subrayar que un procedimiento iterativo por medio de (2.7) o (2.19),

$$\psi = (M_{v}^{-1} \circ \varphi_0)[\Delta \bar{g} - \nabla T \circ \varphi] \quad \left(\dot{\varphi} = (M_w \circ \varphi)^{-1} [\, \dot{\underline{g}}_s - \nabla \dot{u} \circ \varphi] \right)$$

debe evitarse en trabajos prácticos.

2. El resultado más débil en el teorema 2.8 es el de unicidad, que nos restringe a un $H^{3+\delta}$ -entorno del Teluroide φ_0 . Como observa Hörmander (1976) la causa de esta situación es la presencia de la constante $m_\delta = 3+2\varepsilon$ en la estimación (2.54) de la segunda diferencial de ϕ . Si se analiza con detalle la demostración del teorema 2.6 (ibidem) nos convenceríamos de que un mejor teorema de unicidad podría obtenerse reemplazando la condición (2.45) por una condición de Hölder sobre la primera diferencial. Este proceder disminuiría el valor de la constante m_δ.

Sin embargo, trabajando en el espacio de la gravedad por medio de la transformada de Legendre (ver Secc. 2.4), Witsch (1980, 1985) ha obtenido un resultado de unicidad para el problema nolineal en la C^1 topología.

2.4 <u>ESPACIO DE LA GRAVEDAD</u>

En esta sección, presentamos la segunda técnica conocida que permite establecer teoremas de existencia y unicidad para el problema no lineal de Molodensky vectorial. Este método, denominado usualmente "<u>gravity space approach</u>", ha sido introducido en la teoría de problemas de contorno de la Geodesia Física por Sansò (1977).

La idea básica es usar como nuevas coordenadas curvilíneas las coordenadas gravimétricas con respecto del potencial gravífico W ; puesto que el vector gravedad se conoce sobre la superficie de la Tierra, trabajando con estas coordenadas la superficie de la Tierra es una superficie ¡conocida!. En términos precisos, esto se logra por medio de la denominada <u>transformada de Legendre</u> (con respecto de W)

$$\ell_W : \bar{\Omega}_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad x \longrightarrow \nabla W(x) .$$

El principal inconveniente de este método es la necesidad de eliminar la aceleración centrífuga ($\omega = 0$), a fin de garantizar la inyectividad de la aplicación ℓ_W . En efecto, si consideramos una esfera homogénea en rotación, siempre es posible encontrar una circunferencia sobre el plano ecuatorial en cuyos puntos $\nabla W = \underline{0}$ resultando, por tanto, que ℓ_W no es inyectiva (Fig. 2.2).

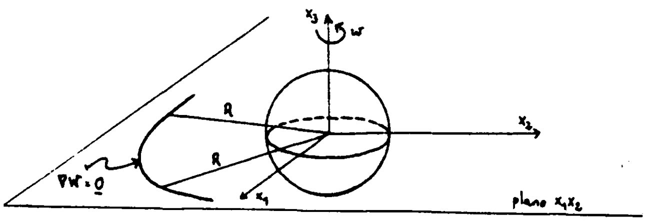

FIGURA 2.2

Así pues, en esta sección consideráremos un modelo de Tierra no rotante, que equivale a suponer conocida la parte rotacional del potencial gravífico terrestre. En otras palabras, supondremos que en los datos de contorno W_s, $\underline{g}_s$ la componente debida a la rotación ha sido eliminada; en la práctica esto puede conseguirse usando una superficie aproximada (por ejemplo, el Teluroide) para estimar $\frac{1}{2}\omega^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$ y $\omega^2(\varphi_1,\varphi_2,0)$ (para una justificación numérica véase (Witsch, 1980)).

Si seguimos designando por W_s y $\underline{g}_s$ el potencial y el vector gravedad gravitatorios, con esta simplificación, el problema de Molodensky vectorial se formula de la siguiente manera (con el origen del sistema de referencia en el centro de masas terrestre)

" dadas la funciones W_s y $\underline{g}_s$, encontrar una inmersión φ de la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ y una función u armónica en Ω_φ , tales que

(i) $u\circ\varphi = W_s$

(ii) $\nabla u\circ\varphi = \underline{g}_s$ (2.58)

(iii) $u = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3})$, $r\to\infty$."

Sea Ω un dominio exterior de $\mathbb{R}^3$ cuya frontera $\partial\Omega$ sea imagen de una C^1-inmersión de S^2 en $\mathbb{R}^3$, y

$\underline{o}\in\mathbb{R}^3-\bar{\Omega}$.

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes bajo las cuales la transformada de Legendre con respecto de una función t no necesariamente armónica

$$\ell_t : \bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^3 , \quad \ell_t(x) = \nabla t(x)$$

es un C^1-difeomorfismo global.

Teorema 2.9

Sea $t \in C^2(\bar{\Omega})$ verificando

(i) $\nabla t \neq \underset{\sim}{0}$ en $\bar{\Omega}$; $\nabla t \longrightarrow \underset{\sim}{0}$, $|x| \rightarrow \infty$

(ii) la matriz de las segundas derivadas $M_t = \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, es invertible para todo $x \in \bar{\Omega}$.

(iii) $\ell_t\big|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\ell_t(x) = \nabla t(x)$ es inyectiva.

Sea

$$\Gamma = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \nabla t(x) , \ x \in \partial\Omega \right\}$$

y designemos por D_0 el conjunto abierto acotado con frontera Γ y $D = D_0 - \{\underset{\sim}{0}\}$.

Entonces

(iv) la transformada de Legendre con respecto de t

$$\ell_t : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \quad \ell_t(x) = \nabla t(x)$$

es un C^1-difeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre $D \cup \Gamma$;

(v) la función $\tilde{t} : D \cup \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{t}(y) = \langle y, \ell_t^{-1}(y) \rangle - t \circ \ell_t^{-1}(y) \tag{2.59}$$

es de $C^2(D \cup \Gamma)$;

(vi) las siguientes relaciones son ciertas

$$\ell_t^{-1}(y) = \nabla \tilde{t}(y) \tag{2.60}$$

$$t(x) = \langle x, \ell_t(x) \rangle - \tilde{t} \circ \ell_t(x) . \tag{2.61}$$

Demostración (Witsch, 1980)

Si en el teorema anterior t es el potencial gravitatorio terrestre u y $\Omega = \Omega_\varphi$, la superficie Γ es la imagen de S^2 mediante $\underline{g}_s$ (Fig. 2.3)

$$\Gamma = \underline{g}_s(S^2) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \underline{g}_s(\sigma) \;,\; \sigma \in S^2 \right\}.$$

Observamos además que, debido a la regularidad en el infinito de ∇u , el dominio Ω_φ se transforma por medio de ℓ_u en un dominio acotado D_0 (con frontera conocida) conteniendo el origen.

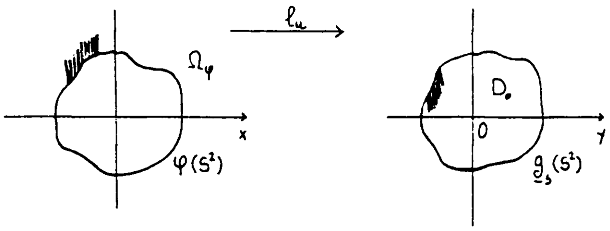

FIGURA 2.3

La función definida por (2.59) se denomina en este caso <u>potencial adjunto</u> de u y la designaremos por ψ ; la fórmula (2.60) indica que la aplicación inversa ℓ_u^{-1} es tambien una transformada de Legendre con respecto del potencial adjunto.

En lo que sigue, supondremos que las condiciones del teorema 2.9 se verifican para el potencial gravitatorio terrestre; de esta forma garantizamos que ℓ_u es un C^1-difeomorfismo global de $\bar{\Omega}_\varphi$ sobre $D \cup \underline{g}_s(S^2)$.

Sin lugar a dudas, el aspecto más relevante de este método es la posibilidad de obtener la figura de la Tierra a partir del conocimiento del potencial adjunto ψ ; en efecto, supuesto conocido el potencial adjunto en $D \cup \underline{g}_s(S^2)$, según (2.60) la inmersión φ vendrá dada por

$$\varphi = \nabla\psi \circ \underline{g}_s \,. \tag{2.62}$$

De esta forma <u>la resolución del problema de Kolodensky vectorial se reduce a la determinación del potencial adjunto ψ en el espacio de la gravedad</u>.

La fórmula (2.60) nos permite también expresar el jacobiano de ℓ_u^{-1} en función de las segundas derivadas del potencial adjunto

$$\mathcal{J}(\ell_u^{-1}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y_i \partial y_j}\right) = M_\psi \,. \tag{2.63}$$

Según el teorema 2.9

$$\mathcal{J}(\ell_u^{-1}) = \mathcal{J}^{-1}(\ell_u)$$

y entonces

$$M_\psi = M_u^{-1} \,. \tag{2.64}$$

Teniendo en cuenta el carácter armónico de u en Ω_φ, la identidad (2.64) permite escribir

$$\mathrm{Tr}\,(M_\psi^{-1}) = 0 \tag{2.65}$$

que es la <u>ecuación fundamental</u> en el espacio de la gravedad.

En virtud de la identidad matricial

$$\mathrm{Tr}\,(A^{-1}) = (\det A)^{-1}\left[\,(\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}\,(A^2)\right]$$

la ecuación (2.65) puede tambien escribirse en la forma

$$\mathrm{Tr}\,(M_\psi^2) - (\Delta\psi)^2 = 0 \tag{2.66}$$

La ecuación anterior es fuertemente no lineal (cuadrática en las segundas derivadas) y elíptica (Sansò, 1977).

Sustituyendo (2.60) en (2.59), obtenemos

$$u \circ \ell_u^{-1} = \langle y, \nabla\psi \rangle - \psi = g\frac{\partial\psi}{\partial g} - \psi \quad \text{en} \quad D \cup \underline{g}_s(S^2) \tag{2.67}$$

donde $g = |y|$; restringiendo la ecuación anterior a $\underline{g}_s(S^2)$, tenemos

$$g\frac{\partial\psi}{\partial g} - \psi = W_s \qquad \text{sobre} \quad \underline{g}_s(S^2) . \tag{2.68}$$

Puesto que $\nabla u \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, la condición asintótica de u en el infinito

$$u(x) = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) \quad , \quad r = |x|$$

permite establecer el comportamiento de ψ en el origen del espacio de la gravedad. En efecto, derivando la expresión anterior con respecto de x_i , obtenemos

$$y_i = D_i u(x) = \frac{-\alpha_u x_i}{r^3} + O(r^{-4}) \quad , \quad r \to \infty$$

y entonces

$$g r^2 = \alpha_u + O(r^{-4}) \quad , \quad r \to \infty . \tag{2.69}$$

De esta última relación se deduce que para cualquier función h definida en Ω_φ , se verifica

$$h(x) = O(r^{-\tau}) , \; r \to \infty \iff h \circ \ell_u^{-1}(y) = O(g^{\tau/2}) , \; g \to 0 \tag{2.70}$$

para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$. Según (2.61)

$$\psi \circ \ell_u(x) = r\frac{\partial u}{\partial r} - u = \frac{-2\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) = -2\alpha_u (r^2 g)^{-1/2} g^{1/2} + O(r^{-3}) .$$

Sustituyendo finalmente (2.69) y (2.70) con $\tau = 3, 4$, obtenemos

$$\psi(y) = -2\alpha_u^{1/2} g^{1/2} + O(g^{3/2}) \quad , \quad g \to 0 . \tag{2.71}$$

Reagrupando todo lo visto hasta ahora, podemos decir que el potencial adjunto del potencial gravitatorio terrestre es solución del problema de contorno no lineal de tipo oblícuo

$$\begin{cases} Tr(M_\psi^2) - (\Delta\psi)^2 = 0 & \text{en } D \\ g\dfrac{\partial\psi}{\partial g} - \psi = W_s & \text{sobre } \underline{g}_s(S^2) \\ \psi = -2\alpha_u^{1/2} g^{1/2} + O(g^{3/2}) , & g \to 0 . \end{cases} \tag{2.72}$$

De esta forma, el problema de Molodensky vectorial en el espacio de la gravedad se reduce a la resolución del problema de contorno (2.72) .

Observaciones

(a) (Witsch, 1980)

Sean t y D como definidos en el teorema 2.9. Si t es armónica en Ω , para cualquier función $v \in C^2(\Omega)$ se verifica

$$\det(M_t^{-1})\,\Delta v = [\,D_{ij}\tilde{t} - \Delta\tilde{t}\,\delta_{ij}\,]\, D_{ij}(v \circ \ell_t^{-1}). \tag{2.73}$$

Si elegimos $\Omega = \Omega_\varphi$, $t = u$ y $v = \psi \circ \ell_u = r\frac{\partial u}{\partial r} - u$, la ecuación (2.73) se convierte en

$$[\,D_{ij}\psi - \Delta\psi\,\delta_{ij}\,]\, D_{ij}\psi = 0 \tag{2.74}$$

sin más que tener en cuenta el carácter armónico de v . La Ec. (2.74) coincide con la ecuación básica (2.66).

(b) Supongamos por un momento que el centro de masas de la Tierra no es el origen del sistema de referencia adoptado. En este caso, la condición asintótica de ψ en el origen es simplemente

$$\psi = O(g^{1/2}) \;,\quad g \to 0$$

y se puede ilustrar de manera muy sencilla la indeterminación del problema de Molodensky vectorial por traslaciones arbitrarias (recordamos que estamos suponiendo $\omega = 0$). En efecto, si $\overline{\psi}$ es solución de (2.72) con el comportamiento en el origen anterior, es fácil comprobar que

$$\psi = \bar{\psi} + \langle \underline{c} \cdot y \rangle$$

también es solución con $\underline{c}$ vector de constantes arbitrarias. Entonces, la inmersión φ correspondiente a ψ viene dada por

$$\varphi = \nabla\psi = \bar{\varphi} + \underline{c} \quad , \quad \bar{\varphi} = \nabla\bar{\psi}$$

que se traduce en una traslación arbitaria con respecto a la configuración inicial calculada a partir de $\bar{\psi}$. La introducción de la condición asintótica (2.71) implica necesariamente $\underline{c} = \underline{0}$, desapareciendo la indeterminación por traslaciones arbitrarias.

Consideremos un $\mathcal{U}$-potencial de referencia v (necesariamente gravitatorio) y el Teluroide gravimétrico φ_0 asociado a él, es decir

$$\nabla v \circ \varphi_0 = \underline{g}_s \, .$$

Supongamos además

$$\bar{\Omega}_{\varphi_0} \subset \Omega \quad \text{(dominio de definición de } v \text{)}$$

$$\ell_v\big|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad x \to \nabla v(x) \quad \text{es una inmersión.}$$

Entonces, según el teorema 2.9 y las condiciones supuestas para v en la Secc 2.1, la transformada de Legendre con respecto de v

$$\ell_v : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \ell_v(x) = \nabla v(x)$$

es un C^1-difeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre su imagen $\ell_v(\bar{\Omega})$. Además,

$$\ell_v(\bar{\Omega}) \supset D \cup \underline{g}_s(S^2)$$

y ℓ_v transforma $\bar{\Omega}_{\varphi_0}$ en $D \cup \underline{g}_s(S^2)$ (Fig. 2.4).

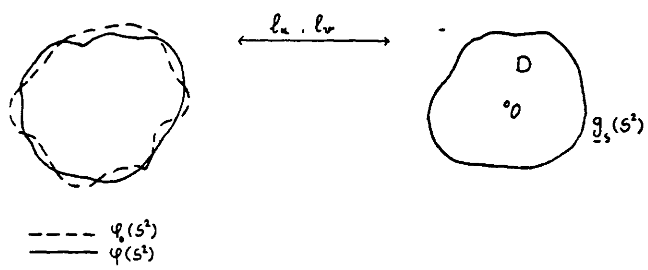

FIGURA 2.4

Como hemos visto en la sección 2.3, la condición asintótica de u en el infinito impone la necesidad de modificar el dato W_s por medio de tres funciones A_1, A_2, $A_3 \in C^\infty(S^2)$ con las propiedades allí indicadas. Puesto que

$$D_i v(x) = \frac{-\alpha_v x_i}{r^3} + O(r^{-4}) \quad , \quad r \to \infty$$

una adecuada elección de dichas funciones trabajando en el espacio de la gravedad puede ser

$$A_i = D_i v \circ \varphi_0 \; . \qquad (2.75)$$

De esta forma, el problema (modificado) de Molodensky vectorial para un modelo de Tierra no rotante se formula en los términos

" dadas las funciones W_s , $\underline{g}_s$ y $\{A_i\}$, encontrar una inmersión φ de la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$, constantes a_1 , a_2 , a_3 próximas a cero, y una función armónica u en Ω_φ , tales que

(i) $u \circ \varphi = W_s - \sum_{j=1}^{3} a_j A_j$

(ii) $\nabla u \circ \varphi = \underline{g}_s$

(iii) $u = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3})$, $r \to \infty$."

Por medio de ℓ_u este problema es equivalente en el espacio de la gravedad a la resolución del problema de contorno

$$\begin{cases} Tr(M_\psi^2) - (\Delta\psi)^2 = 0 & \text{en } D \\ g\dfrac{\partial\psi}{\partial g} - \psi = W_s + \sum_{j=1}^{3} a_j \gamma_j & \text{sobre } g_s(S^2) \\ \psi(\gamma) = -2\alpha_u^{1/2} g^{1/2} + O(g^{3/2}) \ , & g \to 0 \ . \end{cases} \tag{2.76}$$

Observamos que la diferencia entre este problema y el formulado previamente (2.72), es la introducción de tres constantes incógnitas adicionales, correspondiendo al número de condiciones implícitas (ausencia de componentes γ_i) en el comportamiento asintótico de ψ en el origen.

Derivando (2.71) con respecto de γ_i , obtenemos

$$D_i\psi = -\alpha_u^{1/2} g^{-3/2} \gamma_i + O(g^{1/2})$$

$$D_{ij}\psi = -\alpha_u^{1/2} g^{-3/2}\{\delta_{ij} - \tfrac{3}{2}\gamma_i\gamma_j g^{-2}\} + O(g^{-1/2})$$

de donde se deduce que ψ es singular en el origen. Un estudio directo del problema de contorno (2.76) requiere entonces un marco funcional adecuado que tenga en cuenta dicho comportamiento singular en el origen. Con objeto de trabajar en espacios de funciones clásicos (espacios de Hölder, por ejemplo), **Sansò** (1977) considera una transformación más de coordenadas

$$h : \gamma \longrightarrow z = g^{-1/2}\gamma$$

y la función

$$\phi(z) = |z|^{-1}\psi \circ h^{-1}(z) = |z|^{-1}\psi(z|z|) \quad , \quad z \in D' = \{g^{-1/2}\gamma : \gamma \in D\}$$

denominada <u>potencial adjunto reducido</u>.

La función ϕ es regular en el origen

$$\phi(z) = -2\alpha_u^{1/2} + O(|z|^2) \quad , \quad z \to 0 \tag{2.77}$$

y el problema de contorno (2.76) es equivalente a (**Sansò**, 1977)

$$\begin{cases} F[\phi] = 0 & \text{en } D_0' = D' \cup \{0\} \\ B[\phi] = 2\dfrac{W_s}{\rho} + 2\sum_{j=1}^{3} a_j z_j & \text{sobre } \partial D_0' \\ \nabla\phi(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.78)$$

donde $\rho = |z|$,

$$F[\phi] = \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \phi\right)\Delta\phi + \rho^2\left\{Tr\left[(I-\tfrac{3}{4}P)M_\phi\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left(Tr\,(I-\tfrac{3}{4}P)M_\phi\right)^2\right\}$$

$$B[\phi] = \rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho} - \phi$$

$$P = \left(\frac{z_i z_j}{\rho^2}\right) , \quad i,j = 1,2,3 .$$

Introduciendo el operador bilineal

$$M[u,v] = \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho} - u\right)\Delta v + \rho^2\left\{Tr\left[(I-\tfrac{3}{4}P)M_u\,(I-\tfrac{3}{4}P)M_v\right] - \right.$$

$$\left. - Tr\,(I-\tfrac{3}{4}P)M_u \cdot Tr\,(I-\tfrac{3}{4}P)M_v\right\}$$

el operador F puede escribirse en la forma

$$F[\phi] = M[\phi,\phi] .$$

Si $u \in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0')$, $v \in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0')^3$, se comprueba fácilmente que

$$\|M[u,v]\|_{\varepsilon;D_0'} \leq C\,\|u\|_{2+\varepsilon;D_0'}\,\|v\|_{2+\varepsilon;D_0'} . \qquad (2.79)$$

Además

$$\|B[\phi]\|_{1+\varepsilon;\partial D_0'} \leq C\,\|\phi\|_{2+\varepsilon;\partial D_0'} \quad , \quad \phi \in C^{2+\varepsilon}(\partial D_0') . \qquad (2.80)$$

Supongamos $\partial D_0' \in C^{2+\varepsilon}$ para algún $\varepsilon \in (0,1)$ (véase Apéndice) y consideremos el operador

$$P : C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0') \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow C^{\varepsilon}(\bar{D}_0') \times C^{1+\varepsilon}(\partial D_0') \times \mathbb{R}^3$$

$$P[\phi,\underline{a}] = \left(F[\phi] , B[\phi] - \sum_{j=1}^{3} a_j z_j \; , \; \nabla\phi(0)\right) . \qquad (2.81)$$

Según (2.79) y (2.80), el operador P está bien definido.

Supongamos $\frac{W_s}{\rho} \in C^{1+\varepsilon}(\partial D_0^1)$; entonces, la existencia y unicidad de solución del problema de contorno (2.78) en $C^{2+\varepsilon} \times \mathbb{R}^3$ equivale a encontrar un único (ϕ , $\underline{a}$) $\in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0^1) \times \mathbb{R}^3$ verificando la ecuación funcional

$$P[\phi, \underline{a}] = (0, \frac{2W_s}{\rho}, 0) . \qquad (2.82)$$

Si designamos por ϕ_0 el potencial adjunto reducido asociado al potencial normal de referencia, es claro que

$$\phi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0^1)$$

$$P[\phi_0, \underline{0}] = (0, \frac{2W_0}{\rho}, 0) \qquad \text{con} \qquad W_0 = v_0 \varphi_0 .$$

La idea de **Sansò** (1978) es aplicar el teorema clásico de invertibilidad local en espacios de Banach (véase, por ejemplo, **Dieudonné** (1976)), para garantizar la existencia y unicidad de solución de la ecuación funcional (2.82) en un $C^{2+\varepsilon} \times \mathbb{R}^3$ -entorno de (ϕ_0 , $\underline{0}$).

Con este proceder, el punto más delicado es el estudio de la invertibilidad de la primera diferencial de P en (ϕ_0 , $\underline{0}$). Con la misma notación empleada en la Secc. 2.1, si ϕ y $\underline{a}$ dependen suavemente de un parámetro $\tilde{\theta}$, tenemos

$$P'[\phi, \underline{a}](\dot{\phi}, \dot{\underline{a}}) = \left(\frac{dF[\phi]}{d\theta} , B[\dot{\phi}] - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j , \nabla\dot{\phi}(0) \right) .$$

De la expresión de F en términos del operador bilineal M se obtiene

$$\frac{dF[\phi]}{d\tilde{\theta}} = M[\phi, \dot{\phi}] + M[\dot{\phi}, \phi] = \mathcal{L}[\phi]\dot{\phi}$$

con

$$\mathcal{L}[\phi]\dot{\phi} = T_r [A M_{\dot{\phi}}] + \frac{1}{2} \Delta\phi (\rho \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\rho} - \dot{\phi})$$

estando la matriz A definida por la expresión

$$A = 2\rho^2\left[(I-\tfrac{3}{4}P)M_\phi(I-\tfrac{3}{4}P) - (I-\tfrac{3}{4}P)T_r(I-\tfrac{3}{4}P)M_\phi\right] + \tfrac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}-\phi\right)I_3$$

$I_3 = (\delta_{ij})$.

Así pues, la invertibilidad de $P'[\phi_0, \underline{\varrho}]$ está garantizada si el problema <u>lineal</u> de contorno de derivada oblícua

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\phi_0]\dot{\phi} = f & \text{en } D_0' \\ B[\dot{\phi}] = g + \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j & \text{sobre } \partial D_0' \\ \nabla\dot{\phi}(0) = \underline{c} \end{cases} \tag{2.83}$$

admite una única solución $(\dot{\phi}, \dot{\underline{a}}) \in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0') \times \mathbb{R}^3$ para todo $(f, g, \underline{c}) \in C^{\varepsilon}(\bar{D}_0') \times C^{1+\varepsilon}(\partial D_0') \times \mathbb{R}^3$.

<u>Ejemplo</u>

Si elegimos como potencial de referencia el de una esfera homogénea

$$v = \alpha_v / r \quad , \quad \alpha_v > 0$$

la expresión del potencial adjunto es

$$\psi_0 = -2\alpha_v^{1/2} g^{1/2}.$$

En este caso tenemos entonces

$$\phi_0 = -2\alpha_v^{1/2}.$$

Con este valor de ϕ_0, la expresión de $\mathcal{L}[\phi_0]\dot{\phi}$ es

$$\mathcal{L}[\phi_0]\dot{\phi} = \alpha_v^{1/2}\cdot\Delta\dot{\phi}$$

y el problema de contorno linealizado (2.83) se reduce a

$$\begin{cases} \Delta\dot{\phi} = \alpha_v^{-1/2} f & \text{en } D_0' \\ \rho\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\rho} - \dot{\phi} = g + \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j & \text{sobre } \partial D_0' \\ \nabla\dot{\phi}(0) = \underline{c} \end{cases} \tag{2.84}$$

:

El problema de contorno (2.84) puede también obtenerse a partir del problema simple de Molodensky (cfr. Secc. 2.1) por medio de la transformada de Kelvin (Holota, 1981).

Si designamos por $\underline{n}'$ la normal unitaria exterior a $\partial D_0'$, supondremos que

$$\langle \underline{n}', \underline{z} \rangle \neq 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial D_0' \, . \tag{2.85}$$

En último extremo, la condición anterior es una restricción del dato de contorno $\underline{g}_s$, y permite asegurar que el problema de contorno (2.83) es regular en el sentido establecido en la Secc. 2.2. Por otra parte, la condición (2.85) está garantizada si el campo isocenital asociado al potencial normal de referencia no es tangente a $\varphi_0(S^2)$ (Witsch, 1980).

Sansò (1978) demuestra que el operador $\mathcal{L}[\phi_0]$ es elíptico (es decir, la matriz A es definida positiva), y que el problema de contorno (2.83) verifica la alternativa de Fredholm. Entonces, dados $f \in C^{\varepsilon}(\bar{D}_0')$, $g \in C^{1+\varepsilon}(\partial D_0')$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$, si el problema de contorno homogéneo

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\phi_0]\dot{\phi} = 0 & \text{en} \quad D_0' \\ B[\dot{\phi}] = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j & \text{sobre} \quad \partial D_0' \\ \nabla\dot{\phi}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.86}$$

admite como única solución la trivial ($\dot{\phi} = 0$, $\dot{\underline{a}} = \underline{0}$), (2.83) admite una única solución ($\dot{\phi}$, $\dot{\underline{a}}$) $\in C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0') \times \mathbb{R}^3$.

En el caso esférico se demuestra fácilmente la unicidad de solución del problema homogéneo asociado a (2.84)

$$\begin{cases} \Delta\dot{\phi} = 0 & \text{en} \quad D_0' \\ \rho\dfrac{\partial\dot{\phi}}{\partial\rho} - \dot{\phi} = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j & \text{sobre} \quad \partial D_0' \\ \nabla\dot{\phi}(0) = 0 \, . \end{cases} \tag{2.87}$$

En efecto, puesto que $\dot{\phi}$ es armónica, la función $h = \rho\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\rho} - \dot{\phi}$ verifica

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{en } D_0' \\ h = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j & \text{sobre } \partial D_0' . \end{cases} \tag{2.88}$$

De la unicidad de solución del problema de Dirichlet, se deduce

$$h(z) = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j z_j \quad , \quad z \in \overline{D}_0' .$$

Además, de la expresión de h y del comportamiento de $\dot{\phi}$ en el origen, tenemos

$$\nabla h(0) = M_{\dot{\phi}} z\big|_{z=0} = 0$$

y entonces

$$\underline{\dot{a}} = \underline{0} \Rightarrow \rho\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial\rho} - \dot{\phi} = 0 \quad , \quad z \in \overline{D}_0' . \tag{2.89}$$

Por último, puesto que la solución general armónica de (2.89) es $\dot{\phi} = \sum_{j=1}^{3} c_i z_i$ con $\underline{c} = (c_1 , c_2 , c_3)$ vector de constantes arbitrarias, obtenemos

$$\nabla\dot{\phi}(0) = \underline{c} = \underline{0} \quad \Rightarrow \dot{\phi} \equiv 0 .$$

Consideremos ahora el caso general (2.86) con ϕ_0 potencial adjunto reducido de un potencial normal de referencia general v .

Si ($\dot{\phi}$, $\underline{\dot{a}}$) es solución de (2.86), la función

$$\dot{\psi}(y) = \dot{\phi}(g^{-1/2}y)\,g^{1/2} \quad , \quad y \in D \cup \underline{g}_s(S^2)$$

es solución del problema de contorno

$$\begin{cases} Tr\left[\bar{A}(\psi_0)\cdot M_{\dot{\psi}}\right] = 0 & \text{en } D \\ g\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial g} - \dot{\psi} = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j y_j & \text{sobre } \underline{g}_s(S^2) \\ \dot{\psi}(y) = \alpha_{\dot{\psi}}\, g^{1/2} + O(g^{3/2}) & , \ \alpha_{\dot{\psi}} = \dot{\phi}(0) \ , \ g \to 0 \end{cases} \tag{2.90}$$

con $\bar{A}(\psi_0) = M_{\psi_0} - \Delta\psi_0 I_3$, donde ψ_0 es el potencial adjunto asociado a v (Sansò, 1978).

Consideremos la función

$$T = \dot{\psi} \circ \ell_v \quad ;$$

según (2.73) con $t = v$ y $v = T$, si $\dot{\psi}$ verifica la primera ecuación (2.90), la función T es armónica en $\Omega_{\varphi_0} = \ell_v^{-1}(D)$. Además,

$$\langle \nabla\dot{\psi}, y \rangle = \langle \nabla T \circ \ell_v^{-1} , M_v^{-1} y \rangle$$

y entonces, sobre $\varphi_0(S^2)$ la función T verifica la condición de contorno

$$\langle \nabla T, M_v^{-1}(\nabla v) \rangle - T = \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j \ . \tag{2.91}$$

Si tenemos en cuenta la expresión del campo isocenital asociado a v , la condición (2.91) también puede escribirse en la forma

$$\langle \nabla T, h \rangle + T = - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j$$

que es la condición de contorno asociada al problema homogéneo lineal (vectorial) de Molodensky modificado. Por lo que respecta a la condición asintótica de T en el infinito, según (2.69) y (2.70), el comportamiento asintótico de $\dot{\psi}$ en el origen implica

$$T = \frac{\alpha_T}{r} + O(r^{-3}) \ , \ r \to \infty \quad , \ \alpha_T = \alpha_{\dot{\psi}} \, \alpha_v^{1/2} \ .$$

Resumiendo, si $\dot{\psi}$ es solución de (2.90), la función T es solución del problema lineal (vectorial) de Molodensky modificado

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en} \quad \Omega_{\varphi_0} \\ \langle \nabla T, h \rangle + T = - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j & \text{sobre} \quad \varphi_0(S^2) \\ T = \frac{\alpha_T}{r} + O(r^{-3}) \ , \ r \to \infty \ . & \end{cases}$$

Si el Teluroide φ_0 es admisible, en el sentido de que se verifican las condiciones del teorema 2.3, según la proposición 2.7 la única solución del problema de contorno anterior es $T = 0$, $\dot{\underline{a}} = \underline{0}$ y por consiguiente $\dot{\phi} = 0$.

Una demostración directa, trabajando exclusivamente en el espacio de la gravedad, de éste resultado de unicidad para el problema homogéneo (2.86) puede encontrarse en (**Sansò**, 1978).

Introduzcamos la siguiente notación

$$B_1 = C^{2+\varepsilon}(\bar{D}_0') \times \mathbb{R}^3$$

$$B_2 = C^{\varepsilon}(\bar{D}_0') \times C^{1+\varepsilon}(\partial D_0') \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{L}(B_1, B_2) = \{ f : B_1 \longrightarrow B_2 \text{ , lineales y continuas} \} .$$

A fin de poder aplicar el teorema de inversión local al operador P resta comprobar que $P \in C^1$, es decir

(a) $P'[\phi, \underline{a}] \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, verificando

$$\| P[\phi, \underline{a}] - P[\phi_0, \underline{a}_0] - P'[\phi_0, \underline{a}_0](\phi - \phi_0, \underline{a} - \underline{a}_0) \|_{B_2} = O(\|(\phi - \phi_0, \underline{a} - \underline{a}_0)\|_{B_1})$$

para todo $(\phi, \underline{a})$, $(\phi_0, \underline{a}_0) \in B_1$.

(b) $P' : B_1 \longrightarrow \mathcal{L}(B_1, B_2)$, $(\phi, \underline{a}) \longrightarrow P'[\phi, \underline{a}]$

es un operador continuo.

Observamos que la condición (a) indica que el operador es continuo y diferenciable en todo punto de B_1 .

(a) En primer lugar hay que demostrar

$$\| P'[\phi, \underline{a}](\dot{\phi}, \dot{\underline{a}}) \|_{B_2} \leq M \qquad \text{con } \|(\dot{\phi}, \dot{\underline{a}})\|_{B_1} \leq 1 \quad .$$

Según (2.79) y (2.80), tenemos

$$\| \mathcal{L}[\phi]\dot{\phi} \|_{\varepsilon; D_0'} \leq C \|\phi\|_{2+\varepsilon; D_0'} \cdot \|\dot{\phi}\|_{2+\varepsilon; D_0'}$$

$$\| B[\dot{\phi}] - \sum_{i=1}^{3} \dot{a}_i z_i \|_{1+\varepsilon; \partial D_0'} \leq C \left\{ \|\dot{\phi}\|_{2+\varepsilon; \partial D_0'} + \sum_{i=1}^{3} |\dot{a}_i| \right\}$$

$\|\nabla\dot\phi(o)\|_{\mathbb{R}^3} \leq \|\dot\phi\|_{2+\varepsilon;D_0'}$.

Agrupando las estimaciones anteriores, obtenemos finalmente

$$\|P'[\phi,\underline{a}](\dot\phi,\dot{\underline{a}})\|_{B_2} \leq C\{1+\|\phi\|_{2+\varepsilon;D_0'}\}\,\|(\dot\phi,\dot{\underline{a}})\|_{B_1} .$$

De la expresión de $P'[\phi,\underline{a}]$, podemos escribir

$$P[\phi,\underline{a}]-P[\phi_0,\underline{a}_0]-P'[\phi_0,\underline{a}_0](\phi-\phi_0,\underline{a}-\underline{a}_0) = (M[\phi-\phi_0,\phi-\phi_0],0,\underline{o})$$

y según (2.79), tenemos

$$\|P[\phi,\underline{a}]-P[\phi_0,\underline{a}_0]-P'[\phi_0,\underline{a}_0](\phi-\phi_0,\underline{a}-\underline{a}_0)\|_{B_2} = O(\|(\phi-\phi_0,\underline{a}-\underline{a}_0)\|_{B_1}) .$$

(b) En este caso, es suficiente demostrar

$$\|P'[\phi_1,\underline{a}_1]-P'[\phi_2,\underline{a}_2]\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \leq C\|(\phi-\phi_1,\underline{a}-\underline{a}_1)\|_{B_1}$$

con (ϕ_1 , $\underline{a}_1$), (ϕ_2 , $\underline{a}_2$) $\in B_1$.

Sea ($\dot\phi$, $\dot{\underline{a}}$) $\in B_1$; entonces

$$(P'[\phi_1,\underline{a}_1]-P'[\phi_2,\underline{a}_2])(\dot\phi,\dot{\underline{a}}) = (M[\phi_1-\phi_2,\dot\phi]+M[\dot\phi,\phi_1-\phi_2],0,\underline{o})$$

y por consiguiente, de (2.79), obtenemos

$$\|(P'[\phi_1,\underline{a}_1]-P'[\phi_2,\underline{a}_2])(\dot\phi,\dot{\underline{a}})\|_{B_2} \leq C\,\|\phi_1-\phi_2\|_{2+\varepsilon;\bar{D}_0'}\,\|(\dot\phi,\dot{\underline{a}})\|_{B_1}$$

que implica necesariamente lo que se quiere demostrar.

Con los resultados parciales que hemos obtenido, podemos enunciar finalmente un teorema de existencia y unicidad para el problema de Molodensky vectorial (modificado) en el espacio de la gravedad:

Teorema 2.10 (Sansò, 1978)

Sea $\underline{g}_s$ una inmersión de S^2 en $\mathbb{R}^3$ de clase $C^{2+\varepsilon}$ y supongamos $w_s \in C^{1+\varepsilon}(S^2)$. Sea φ_o el Teluroide gravimétrico asociado a un U -potencial de referencia $v \in C^{\infty}(\Omega)$. Supongamos además que φ_o es admisible y

$$\bar{\Omega}_{\varphi_o} \subset \Omega$$

$\ell_v|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \quad x \longrightarrow \nabla v(x)$ es una inmersión.

Entonces, el problema de contorno (2.78) admite una única solución (ϕ , $\underline{a}$) próxima a (ϕ_o , $\underline{o}$) en $C^{2+\varepsilon} \times \mathbb{R}^3$ si $\frac{W_s}{\rho}$ es próximo a $\frac{W_o}{\rho}$ en $C^{1+\varepsilon}$.

El teorema anterior permite obtener de manera única la solución del problema de Molodensky vectorial

$$(\varphi = \nabla\psi \circ \underline{g}_s \, , \, \underline{a}) \in C^{1+\varepsilon} \times \mathbb{R}^3$$

siempre y cuando $\frac{W_s}{|\underline{g}_s|^{1/2}}$ sea suficientemente próximo a $\frac{W_o}{|\underline{g}_s|^{1/2}}$ en el espacio $C^{1+\varepsilon}(S^2)$.

Si comparamos este resultado con el obtenido por **Hörmander** (teorema 2.8), se observa que hemos ganado una **derivada** con **respecto** del dato W_s y con respecto de la solución φ .

Una diferencia importante entre este método y el descrito en la Secc. 2.3 es la posibilidad que hay en el espacio de la gravedad de aplicar el teorema clásico de inversión local, sin necesidad de recurrir a teoremas del tipo **Nash-Moser**: en efecto, en este caso la inversa de la primera diferencial del operador P no pierde derivadas, resultando posible un procedimiento de aproximaciones sucesivas (por medio de un esquema tipo Newton) para resolver el problema no lineal a partir del problema lineal.

Observación final.

En (Sansò, 1981b) se considera también la transformación

$$x \longrightarrow y = u(x)\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$$

que hace uso de las coordenadas de Marussi (en efecto, (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas cartesianas de un punto cuyas coordenadas polares son las coordenadas de Marussi con respecto del potencial gravitatorio terrestre).

Con esta transformación, es posible establecer una teoría análoga a la expuesta en esta sección para resolver el problema de Molodensky vectorial. En el espacio-y, espacio de Marussi, se introduce la función auxiliar

$$\varphi = \langle x, y \rangle$$

que goza de la propiedad fundamental

$$x = \nabla_y \varphi - y\frac{\partial}{\partial \rho}(\varphi/\rho) \quad , \quad \rho = |y|$$

en paralelismo con (2.62).

[1]Sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ dos espacios de Banach, y $F: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Si el espacio imagen se puede descomponer de la forma

$$\mathcal{Y} = rg F \oplus Y'$$

con $\dim Y' = d$, se dice que la codimensión del rango es d .

[2]En este caso, la expresión analítica del campo isocenital es algo más complicada. Concretamente, despreciando cantidades del orden de ω^4 , se tiene (Hörmander, 1976)

$$h = x/2 + \omega^2 R^2/2A\{(3x_3^2/R^2-1)x - 5(0,0,x_3)\}$$

con $A + \omega^2 R^3/3 = A_0$ y A_0 el valor constante del potencial sobre la esfera de referencia de radio R . De esta forma, el problema lineal (vectorial) de Molodensky sobre S_R^2 deja de ser de tipo Neumann para convertirse de tipo derivada oblícua. (Cfr. también (Bode y Grafarend, 1980)).

[3]Tanto en este apartado como en el 3.3, ε designará un número real estrictamente comprendido entre 0 y 1;así pues, haremos uso de la notación $C^{k+\varepsilon}$ para designar a $H^{k+\varepsilon}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por otra parte,en los trabajos citados en estos dos apartados se hace uso de la norma más usual

$$|u|_{k+\varepsilon;\bar{\Omega}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u| + \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|_{\varepsilon;\Omega}$$

Con esta norma, si Ω es un dominio acotado, $C^{k+\varepsilon}(\bar{\Omega})$ es de Banach. Además, con adecuados requisitos de regularidad para $\partial\Omega$ (al menos de C^1), la norma definida previamente y la introducida al inicio de la sección 2.3 son equivalentes.Finalmente, las propiedades establecidas en el apéndice siguen siendo válidas (véase, Schaeffer, 1976).

CAPITULO 3

PROBLEMA DE MOLODENSKY ESCALAR

En este capítulo estudiamos el problema de Molodensky escalar cuyo planteamiento se presentó en la sección 1.3.

En la primera sección, con la introducción de una adecuada representación funcional del problema, reducimos su resolución a la resolución de una ecuación funcional. Esta ecuación se lineali-za por medio de la técnica de Hörmander. En 3.2 la linealización se realiza en el Teluroide.

En 3.3 se analiza el método introducido por Sacerdote y Sansó (1986) por medio del cual se transforma este problema de frontera libre en uno con frontera conocida. Se presta especial atención a las condiciones que garantizan la posibilidad de dicha transformación, así como a la ecuación en derivadas parciales que el módulo del radio vector verifica en el nuevo dominio. De esta forma se obtiene un resultado de existencia y unicidad en un entorno del caso esférico.

Por último, por medio del teorema de Nash-Hörmander se establece un nuevo teorema de existencia y unicidad válido para configuraciones más generales.

3.1 FORMULACION FUNCIONAL DEL PROBLEMA. LINEALIZACION POR MEDIO DE LA DERIVADA CON RESPECTO DE UN PARAMETRO

Como vimos en la sección 1.3, el problema es encontrar una función $r: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y una función u definida en Ω_r tal que

$$\begin{aligned} &(i) \quad \Delta u = 0 \qquad \text{en } \Omega_r \\ &(ii) \quad w \circ \varphi_r = w_s \qquad\qquad (3.1) \\ &(iii) \quad |\nabla w \circ \varphi_r| = g_s \end{aligned}$$

(iv) $u = O(r^{-1})$, $r \to \infty$

con W definido por (1.3). Los datos W_s , g_s representan el potencial y el módulo del vector gravedad medidos sobre la superficie de la Tierra.

Conocido r , y considerando que la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega_r \\ u \circ \varphi_r = W_s - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta & \text{sobre} \quad S^2 \\ u = O(r^{-1}) \ , \ r \to \infty \end{cases} \tag{3.2}$$

es completamente conocida, las condiciones (3.1) permiten establecer g_s como un funcional Γ_1 de W_s y r ,

$$g_s = \Gamma_1(W_s, r) = |\nabla W \circ \varphi_r| \tag{3.3}$$

con W verificando (1.3) y u solución del problema de Dirichlet (3.2).

Por otra parte, conocido r y la solución del problema no lineal de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega_r \\ |\nabla u \circ \varphi_r + \omega^2(x_1, x_2, 0)| = g_s & \text{sobre} \quad S^2 \\ u = O(r^{-1}) \ , \ r \to \infty \end{cases} \tag{3.4}$$

las condiciones (3.1) dan W_s como un funcional Γ_2 de g_s y r ,

$$W_s = \Gamma_2(g_s, r) = W \circ \varphi_r \tag{3.5}$$

con W verificando (1.3) y u solución de (3.4). Observamos que el problema de contorno (3.4) es el **problema gravimétrico con contorno fijo presentado en 1.3**.

Así pues, en virtud de (3.3) y (3.5) son posibles dos formulaciones funcionales diferentes del problema de Molodensky escalar. En ambos casos, la cuestión es analizar si

$$g_s = \Gamma_1(W_s, r) \qquad (\text{resp. } W_s = \Gamma_2(g_s, r)\ )$$

define a r como funcional de los datos de contorno W_s y g_s .

Como se hizo al estudiar el problema de Molodensky vectorial y por las mismas razones allí expuestas (véase Secc. 2.3), resulta más conveniente trabajar con los operadores Φ_1 y Φ_2 definidos en la forma

$$\Phi_1(W_s, r) = (W_s, \Gamma_1(W_s, r))$$
$$\Phi_2(g_s, r) = (g_s, \Gamma_2(g_s, r)).$$

Ambas formulaciones del problema tienen sus ventajas y desventajas. En efecto, trabajar con el operador Φ_1 impone el estudio de un problema de contorno tipo Dirichlet, mientras que el operador Φ_2 necesita de un problema de contorno intermedio nolineal en la condición sobre la frontera. Sin embargo, como veremos a continuación, la inversa de la primera diferencial de Φ_1 "pierde más derivadas" que la correspondiente de Φ_2 , y aunque en ambos casos no sería conveniente un proceso iterativo para la resolución, trabajar con Φ_2 reduciría probablemente la regularidad a priori que es necesario suponer para los datos.

El primer paso para el estudio del problema no-lineal (3.1) es la obtención de las ecuaciones linealizadas. Para ello, supongamos que todas las cantidades que intervienen en su formulación son suaves y dependen suavemente de un parámetro $\tilde{\theta}$.

(a) <u>Linealización de Φ_1</u>

Si designamos la derivada con respecto de $\tilde{\theta}$ con un punto encima de la variable, es claro que $\dot{W} = \dot{u}$ es armónica en Ω_r con igual comportamiento en el infinito que u . Además, tenemos

$$\Phi_1'(w_s,r)(\dot{w}_s,\dot{r}) = \left(\frac{d}{d\theta}(W\circ\varphi_r)\,,\,\frac{d}{d\theta}\Gamma_1(w_s,r)\right) = (\dot{w}_s\,,\,\dot{g}_s)$$

con

$$\frac{d}{d\theta}(W\circ\varphi_r) = \dot{u}\circ\varphi_r + \langle\nabla W\circ\varphi_r\,,\,\underline{e}_r\rangle\,\dot{r} = \dot{w}_s \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{d\theta}\Gamma_1(w_s,r) = \langle\underline{e}_g\,,\,\nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle + \langle\underline{e}_g\,,\,(M_w\circ\varphi_r)\,\underline{e}_r\rangle\,\dot{r} = \dot{g}_s \tag{3.7}$$

habiendo empleado la notación

$$\underline{e}_g = \frac{\nabla W\circ\varphi_r}{|\nabla W\circ\varphi_r|}$$

$$M_w = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}\right).$$

En todo lo que sigue supondremos que sobre S^2 se verifica

$$g_s = |\nabla W\circ\varphi_r| \neq 0$$

Si

$$\langle\underline{e}_g\,,\,(M_w\circ\varphi_r)\,\underline{e}_r\rangle \neq 0 \qquad \text{sobre} \quad S^2 \tag{3.8}$$

podemos despejar $\dot{r}$ de (3.7) obteniéndose

$$\dot{r} = \left(\dot{g}_s - \langle\underline{e}_g\,,\,\nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle\right)\langle\underline{e}_g\,,\,(M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}. \tag{3.9}$$

La condición de contorno que $\dot{u}$ verifica sobre $\varphi_r(S^2)$ se obtiene sustituyendo el valor de $\dot{r}$ dado por (3.9) en (3.6). Con dicha sustitución tenemos

$$\dot{u}\circ\varphi_r - \langle\underline{\alpha}\,,\,\nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle = f \qquad \text{sobre} \quad S^2 \tag{3.10}$$

donde

$$\underline{\alpha} = \langle\underline{e}_g\,,\,(M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\langle\nabla W\circ\varphi_r\,,\,\underline{e}_r\rangle\,\underline{e}_g \tag{3.11}$$

$$f = \dot{w}_s - \langle\underline{e}_g\,,(M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\langle\nabla W\circ\varphi_r\,,\,\underline{e}_r\rangle\,\dot{g}_s = \dot{w}_s - \alpha\dot{g}_s\,. \tag{3.12}$$

Trabajando con el operador Φ_1 supondremos cierta la condición (3.8), que juega el mismo papel que la de Marussi en el problema de Molodensky vectorial (cfr. 2.1). Es fácil dar una interpretación física a dicha condición. En efecto, puesto que $M_w \circ \varphi_r$ es simétrica tenemos

$$\langle \underline{e}_g \, , (M_w \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle = \langle (M_w \circ \varphi_r) \underline{e}_g \, , \underline{e}_r \rangle \, .$$

Se comprueba además fácilmente que

$$\nabla(|\nabla w|) \circ \varphi_r = (M_w \circ \varphi_r) \underline{e}_g$$

de tal modo que, expresando el gradiente en coordenadas esféricas, obtenemos

$$\langle \underline{e}_g \, , (M_w \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle = \frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r} \circ \varphi_r$$

Así pues, la condición (3.8) significa que la derivada radial del módulo del vector gravedad es diferente de cero sobre $\varphi_r(S^2)$. Análogamente podemos escribir

$$\langle \nabla w \circ \varphi_r \, , \underline{e}_r \rangle = \frac{\partial w}{\partial r} \circ \varphi_r \, .$$

Resumiendo, para determinar la perturbación $\dot{r}$ de r a partir de $\dot{w}_s$ y $\dot{g}_s$ por medio de (3.9), es necesario resolver el problema de contorno de tipo oblícuo

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en} \quad \Omega_r \\ \dot{u} \circ \varphi_r - \langle \underline{\alpha} \, , \nabla \dot{u} \circ \varphi_r \rangle = f & \text{sobre} \quad S^2 \\ \dot{u}(x) = O(r^{-1}) \quad , \quad r \to \infty & \end{cases} \tag{3.13}$$

con $\underline{\alpha}$ y f dados por (3.11) y (3.12).

Si el problema de contorno anterior admite una única solución regular para todo f regular, entonces la inversa de la primera diferencial de Φ_1 viene dada por

$$[\Phi_1'(w_s, r)]^{-1}(\dot{w}_s, \dot{g}_s) = (\dot{w}_s \, , \; (\dot{g}_s - \langle \underline{e}_g, \nabla \dot{u} \circ \varphi_r \rangle)[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r} \circ \varphi_r]^{-1}) \, . \tag{3.14}$$

A continuación veamos cual es la pérdida de diferenciabilien este caso. Supongamos que tenemos una solución aproximada para la cual r tenga k derivadas. Entonces, debido a la presencia de las segundas derivadas de w en (3.11), el campo de vectores $\underline{\alpha}$ tendrá $k-2$ derivadas, al igual que el dato f ; de esta forma, $\dot{u}$ no podrá tener más de $k-1$ derivadas y $\dot{r}$ $k-2$. Esta situación es idéntica a la que se presenta en el problema de Molodensky vectorial (cfr. Secc. 2.1).

(b) Linealización de Φ_2

En este caso, la derivada de Fréchet del operador Φ_2 viene dada por

$$\Phi_2'(g_s,r)(\dot{g}_s,\dot{r}) = \left(\frac{d}{d\theta}(|\nabla w\circ\varphi_r|), \frac{d}{d\theta}\Gamma_2(g_s,r)\right) = (\dot{g}_s, \dot{w}_s)$$

siendo válidas las ecuaciones (3.6) y (3.7).

Si sobre S^2 suponemos que se verifica

$$\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r \neq 0 \tag{3.15}$$

podemos despejar $\dot{r}$ de (3.6), obteniéndose

$$\dot{r} = (\dot{w}_s - \dot{u}\circ\varphi_r)\cdot\langle\nabla w\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle^{-1}. \tag{3.16}$$

Observamos, que la fórmula anterior es la conocida fórmula de Bruns (véase por ejemplo, Heiskanen y Moritz, 1985).

De nuevo la función $\dot{u}$ es armónica en Ω_r con igual regularidad en el infinito que u . La condición de contorno que $\dot{u}$ verifica sobre $\varphi_r(S^2)$, se obtiene ahora sustituyendo la expresión (3.16) en (3.7); entonces

$$\langle\underline{e}_g, \nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle - \beta(\dot{u}\circ\varphi_r) = g \qquad \text{sobre } S^2 \tag{3.17}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r\right)^{-1}\left(\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r\right) \tag{3.18}$$

$$g = \dot{g}_s - \beta\dot{w}_s\ . \tag{3.19}$$

Así pues, conocidos $\dot{w}_s$ y $\dot{g}_s$, para obtener $\dot{r}$ a partir de (3.16) es necesario resolver previamente el problema de contorno de tipo oblícuo

$$\begin{cases} \Delta\dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_r \\ \langle \underline{e}_g , \nabla\dot{u}\circ\varphi_r \rangle - \beta(\dot{u}\circ\varphi_r) = g & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u}(x) = O(r^{-1}) \quad r \to \infty & \end{cases} \tag{3.20}$$

con β y g dados por (3.18) y (3.19).

Si el problema de contorno anterior admite una única solución, la inversa de la primera diferencial de Φ_2 es

$$[\Phi_2'(g_s, r)]^{-1}(\dot{g}_s, \dot{w}_s) = (\dot{g}_s \, , \, (\dot{w}_s - \dot{u}\circ\varphi_r)(\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r)^{-1}) \tag{3.21}$$

con $\dot{u}$ la solución de (3.20).

Como hemos anunciado anteriormente en este caso hay una pérdida menor de diferenciabilidad. En efecto, puesto que en (3.16) no aparecen las derivadas primeras de $\dot{u}$, si tenemos una solución aproximada para la cual r tenga k derivadas podremos esperar a lo sumo $k-1$ derivadas para $\dot{r}$.

En todo lo que sigue, y particularmente en la sección 3.4, nos restringiremos al estudio del problema de Molodensky escalar por medio de la formulación funcional Φ_1 . Al problema de contorno (3.13) le denominaremos <u>problema lineal (escalar) de Molodensky</u>.

Analicemos ahora con detalle el <u>caso esférico</u>. Supongamos una configuración inicial para la cual $w = c/r$ $c > 0$ y $r = r_0$ con r_0 una cierta superficie aproximada. Con esta elección, tenemos

$$\underline{e}_g = -\underline{e}_r \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r = \frac{-c}{r_0^2} \quad , \quad \frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r = \frac{-2c}{r_0^3}$$

$$\underline{x} = \frac{-r_0}{2}\,\underline{e}_r$$

$$f = \dot{w}_s - \frac{r_0}{2} \dot{g}_s .$$

De esta forma la condición de contorno asociada al problema (3.13) se convierte en

$$2\dot{u} + r \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} = 2f \qquad \text{sobre} \quad \varphi_{r_0}(S^2)$$

que es igual a la condición de contorno del problema simple de Molodensky (cfr. Secc. 2.1).

Así pues, según la proposición 2.2, el problema de contorno (3.13) no admite una única solución, siendo su solución general

$$\dot{u} = \dot{u}_p + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{x_i}{r^3}$$

con $\dot{u}_p$ solución particular y $\{a_i\}$ constantes reales arbitrarias. Entonces derivando con respecto de $\underset{\sim}{x}$ resulta

$$\nabla \dot{u} = \nabla \dot{u}_p + \frac{1}{r^3} \underset{\sim}{a} (I - 3P_x) \quad , \quad P_x = \left(\frac{x_i x_j}{r^2} \right)$$

y según (3.9) la perturbación $\dot{r}$ de r viene dada por

$$\dot{r} = \langle \underset{\sim}{a} , \underset{\sim}{e}_r \rangle + \dot{r}_p \tag{3.22}$$

con $\dot{r}_p$ calculado a partir de $\dot{u}_p$.

Por consiguiente, en aproximación lineal, el radio vector de la superficie terrestre es

$$r = r_p + \langle \underset{\sim}{a} , \underset{\sim}{e}_r \rangle \tag{3.23}$$

con $r_p = r_0 + \dot{r}_p$.

Esta indeterminación en la solución, al nivel de las ecuaciones linealizadas, se traduce en una indeterminación por deformaciones radiales variables punto a punto $\langle \underset{\sim}{a} , \underset{\sim}{e}_r \rangle$ manteniendo las coordenadas angulares (θ, λ) (ver fig. 3.1).

Recordamos que en el problema de Molodensky vectorial, la indeterminación en la solución del problema lineal se traducía en una indeterminación por traslaciones arbitrarias.

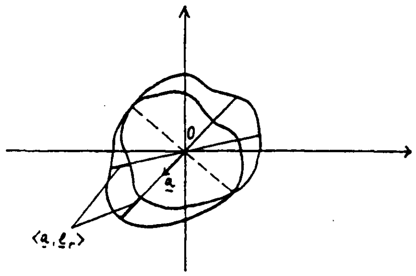

FIGURA 3.1

Si imponemos que el origen sea el centro de masas terrestre, que equivale a elegir un elipsoide geocéntrico de referencia, la condición asintótica de $\dot{u}$ en el infinito se convierte en

$$\dot{u} = \frac{\alpha_i}{r} + O(r^{-3}) \qquad r \rightarrow \infty$$

resultando $\underline{a} = \underline{o}$. En términos del operador Φ_1 esto equivale a garantizar la inyectividad del operador $\Phi_1'(c/r_0, r_0)$, eliminándose así la indeterminación antes mencionada.

Los resultados anteriores pueden ser visualizados mucho mejor si nos referimos a la teoría clásica relacionada con la fórmula de Stokes. En efecto, como se demuestra en (Heiskanen y Moritz, 1985) la generalización de la fórmula de Stokes a un elipsoide arbitrario cuyo centro, elegido como origen del sistema de referencia, no coincida con el centro de gravedad de la Tierra, contiene el término adicional

$$N_1(\theta, \lambda) = \xi \operatorname{sen}\theta \cos\lambda + \eta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda + \zeta \cos\theta$$

con (ξ, η, ζ) las coordenadas rectangulares del centro de gravedad terrestre. Si introducimos el vector $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ y el vector unitario en la dirección radial $\underline{e}_r$ podemos escribir

$$\mathcal{N}_1(\theta,\lambda) = \langle \underline{\xi}, \underline{e}_r \rangle \tag{3.24}$$

cuya estructura es análoga a la obtenida para $\dot{r}$. Es claro que la indeterminación en la ondulación del geoide por medio de (3.24) queda anulada si el centro de gravedad de la Tierra es el origen del sistema de referencia adoptado, en cuyo caso $\underline{\xi} = \underline{o}$ y $\mathcal{N}_1 = 0$.

Así pues, en lo que sigue supondremos para u un comportamiento asintótico de la forma (1.15); ahora el problema de Molodensky escalar se formula en los siguientes términos

" dados W_s y g_s , encontrar una función r y una función u definida en Ω_r , tal que

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_r \\ \text{(ii)} & W_s = W \circ \varphi_r & \\ \text{(iii)} & g_s = |\nabla W \circ \varphi_r| & \\ \text{(iv)} & u = \dfrac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{array} \tag{3.25}$$

con W definido por (1.3)."

Funcionalmente, el problema (3.25) se reduce ahora a la resolución de la ecuación funcional

$$\Phi_1(W_s, r) = (W_s, g_s) \tag{3.26}$$

con Φ_1 definido por

$$\Phi_1(W_s, r) = (W_s, \Gamma_1(W_s, r)) \qquad \Gamma_1(W_s, r) = |\nabla W \circ \varphi_r|$$

donde $W(x) = u(x) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$ y u solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_r \\ u \circ \varphi_r = W_s - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta & \text{sobre } S^2 \\ u = \dfrac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.27}$$

La linealización de (3.26) se realiza exactamente igual que para el planteamiento inicial. La única diferencia en el resultado final es en la condición asintótica que $\dot{u}$ verifica en el infinito, que debe ser del tipo (1.15), es decir sin contener componente armónica de primer grado.

La formulación (3.25) tiene la desventaja de que ahora el operador Φ_1 puede no estar bien definido. En efecto, igual que ocurre en el problema de Molodensky vectorial, el problema de Dirichlet (3.27) requiere que W_s verifique tres condiciones linealmente independientes de compatibilidad con el comportamiento asintótico de u en el infinito. Así pues, es necesario reformular una vez más el problema a fin de garantizar su resolubilidad para datos de contorno arbitrarios. Tal reformulación se realizará en la sección 3.4 siguiendo el procedimiento introducido por Hörmander (1976).

Finalizamos esta sección observando que la única diferencia esencial entre el problema lineal (vectorial) de Molodensky y el problema lineal (escalar) de Molodensky, radica en la dirección del campo de vectores a lo largo de la cual se efectúa la derivación de $\dot{u}$ en la frontera: mientras que en el problema vectorial son las líneas isocenitales, en el problema escalar son las líneas de la plomada. Así pues, se podría enunciar un teorema análogo al 2.3 para el problema homogéneo asociado al (3.13); lo único que cambiaría sería h_t por $\underline{\alpha}_t$ y h_n por $\underline{\alpha}_n$.

Por consiguiente, bajo las condiciones establecidas en el teorema 2.3, el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en} \quad \Omega_r \\ \dot{u} \circ \varphi_r - \langle \underline{\alpha} \, . \, \nabla \dot{u} \circ \varphi_r \rangle = f & \text{sobre} \quad S^2 \\ \dot{u}(x) = \dfrac{\alpha_{\dot{u}}}{r} + O(r^{-3}) \qquad r \to \infty & \end{cases}$$

puede ser resuelto de manera única para toda f regular verificando, en virtud de la alternativa de Fredholm, tres condiciones linealmente independientes.

3.2 LINEALIZACION EN EL TELUROIDE

Con los datos de contorno disponibles (W_s , g_s , x/r) podemos definir el Teluroide de las dos maneras siguientes:

(a) Teluroide angular-potencial

superficie Σ_{ap} constituida por los puntos $q \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$q/|q| = p/|p| \qquad , v(q) = W_s(p/|p|) \text{ para algún } p \in \varphi_r(S^2) \tag{3.28}$$

siendo v un U -potencial de referencia;

(b) Teluroide angular-gravimétrico

superficie Σ_{ag} constituida por los puntos $q \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$q/|q| = p/|p| \qquad , |\nabla v(q)| = g_s(p/|p|) \text{ para algún } p \in \varphi_r(S^2) \tag{3.29}$$

(ver fig. 3.2).

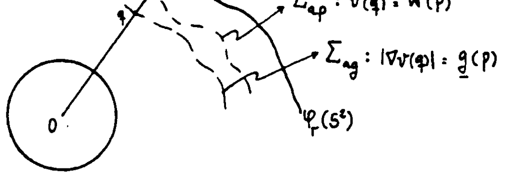

FIGURA 3.2

Siguiendo las ideas introducidas en la sección 2.1, podemos escribir en este caso

$$\Sigma_{ap} = \varphi_{r_p}(S^2) \quad , \quad \Sigma_{ag} = \varphi_{r_g}(S^2)$$

con r_p y r_g dados por

$$r_p : S^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad r_p(\sigma) = |q| \; , \quad v(q) = W_s(\sigma) \; , \quad \sigma = q/|q|$$

$$r_g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad r_g(\sigma) = |q| \; , \quad |\nabla v(q)| = g_s(\sigma) \; , \quad \sigma = q/|q| \; .$$

A efectos de dar mayor generalidad a los razonamientos que siguen a continuación, designaremos por Σ tanto a Σ_{ap} como a Σ_{ag} o a cualquier otra buena aproximación de la superficie topográfica terrestre construida a partir del campo normal de referencia y parametrizable en la forma $\Sigma = \varphi_{r_o}(S^2)$ con $r_o : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

El proceso de linealización en el Teluroide Σ es completamente análogo al estudiado para el problema de Molodensky vectorial (teorema 2.1). En aproximación lineal, tenemos en este caso

$$W_s(\sigma) \doteq v(\varphi_{r_o}(\sigma)) + \langle \nabla v(\varphi_{r_o}(\sigma)) , e_r \rangle \zeta(\sigma) + T(\varphi_r(\sigma)) \tag{3.30}$$

$$g_s(\sigma) \doteq |\nabla v(\varphi_{r_o}(\sigma)) + \zeta(\sigma) M_v(\varphi_{r_o}(\sigma)) e_r + \nabla T(\varphi_r(\sigma))| \tag{3.31}$$

siendo T el potencial perturbador definido según (2.6) y $\zeta(\sigma) = r(\sigma) - r_o(\sigma)$ la <u>anomalía de la altitud</u>.

Manteniendo el primer orden de aproximación, la expresión (3.31) se escribe también en la forma

$$\begin{aligned} g_s(\sigma) = \; & |\nabla v(\varphi_{r_o}(\sigma))| + \langle e_\gamma , M_v(\varphi_{r_o}(\sigma)) e_r \rangle \zeta(\sigma) + \\ & + \langle e_\gamma , \nabla T(\varphi_r(\sigma)) \rangle \quad , \qquad e_\gamma = \frac{\nabla v \circ \varphi_{r_o}}{|\nabla v \circ \varphi_{r_o}|} \; . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Si nos remitimos a la notación empleada en la sección prececente, observamos que (3.32) es la linealización de Γ_1 mientras que (3.30) es la linealización de Γ_2 . Despejando ζ de ambas ecuaciones, obtenemos

$$\zeta = (\Delta g - \langle \underline{e}_\gamma , \nabla T \circ \varphi_r \rangle) \langle \underline{e}_\gamma , (M_v \circ \varphi_{r_0}) \underline{e}_r \rangle^{-1} \qquad (\text{para } \Gamma_1) \qquad (3.33)$$

si $\langle \underline{e}_\gamma , (M_v \circ \varphi_{r_0}) \underline{e}_r \rangle \neq 0$ y

$$\zeta = (\Delta W - T \circ \varphi_r) \langle \nabla v \circ \varphi_{r_0} , \underline{e}_r \rangle^{-1} \qquad (\text{para } \Gamma_2) \qquad (3.34)$$

si $\langle \nabla v \circ \varphi_{r_0} , \underline{e}_r \rangle \neq 0$. En estas expresiones, hemos designado por ΔW la anomalía del potencial y por $\Delta g = g_s - |\nabla v \circ \varphi_0|$ la anomalía (escalar) de la gravedad.

La fórmula (3.33) se ajusta mejor al Teluroide angular-gravimétrico, pues en este caso $\Delta g = 0$, resultando

$$\zeta = - \langle \underline{e}_\gamma , \nabla T \circ \varphi_r \rangle \langle \underline{e}_\gamma , (M_v \circ \varphi_{r_0}) \underline{e}_r \rangle^{-1} . \qquad (3.35)$$

Por otra parte, (3.34) se ajusta mejor al Teluroide angular-potencial, pues $\Delta W = 0$, obteniéndose

$$\zeta = (- T \circ \varphi_r) \langle \nabla v \circ \varphi_{r_0} , \underline{e}_r \rangle^{-1} \qquad (3.36)$$

que identificamos como la fórmula de Bruns (véase **Heiskanen** y Moritz, 1985; Secc. 2-13).

Si designamos por γ el módulo del vector gravedad de referencia, es claro que podemos escribir

$$\langle \underline{e}_\gamma , (M_v \circ \varphi_{r_0}) \underline{e}_r \rangle = \frac{\partial \gamma}{\partial r} \circ \varphi_{r_0} , \quad \langle \nabla v \circ \varphi_{r_0} , \underline{e}_r \rangle = \frac{\partial v}{\partial r} \circ \varphi_{r_0} .$$

Una vez obtenida ζ , la ecuación fundamental de contorno asociada al carácter armónico de T surge al sustituir (3.33) en (3.30) para Γ_1 , y (3.34) en (3.32) para Γ_2 ; es decir

(i) <u>para Γ_1</u>

$$\Delta W - \alpha_0 \Delta g = T \circ \varphi_r - \langle \underline{\alpha}_0 , \nabla T \circ \varphi_r \rangle$$

suponiendo que sobre S^2 se verifica $\frac{\partial \gamma}{\partial r} \circ \varphi_{r_0} \neq 0$;

(ii) <u>para Γ_2</u>

$$\Delta g - \beta\, \Delta W = \langle \underline{e}_{\Upsilon}, \nabla T \circ \varphi_r \rangle - \beta_0 (T \circ \varphi_r)$$

suponiendo que sobre S^2 se verifica $\frac{\partial v}{\partial r} \neq 0$;
hemos empleado la siguiente notación,

$$\alpha_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)^{-1}, \qquad \underline{\alpha}_0 = \alpha_0\, \underline{e}_{\Upsilon}$$

$$\beta_0 = \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)^{-1}.$$

Con las ecuaciones anteriores se tiene toda la información necesaria para plantear la linealización en el Teluroide, la cual consta de las siguientes etapas:

<u>Etapa I</u>

(a) En primera aproximación consideramos $\Gamma_{(1)} = \Gamma_0$, que equivale a suponer que la superficie topográfica terrestre coincide con el Teluroide;

(b) Analizar la existencia y unicidad de solución de los problemas de contorno

(i) para Γ_1

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \Omega_{\Gamma_0} \\ T \circ \varphi_{r_0} - \langle \underline{\alpha}_0, \nabla T \circ \varphi_{r_0} \rangle = f & \text{sobre } S^2 \\ T = \dfrac{\delta \alpha}{r} + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.37}$$

con $f = \Delta W - \alpha_0\, \Delta g$;

(ii) para Γ_2

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \Omega_{\Gamma_0} \\ \langle \underline{e}_{\Upsilon}, \nabla T \circ \varphi_{r_0} \rangle - \beta_0 (T \circ \varphi_{r_0}) = g & \text{sobre } S^2 \\ T = \dfrac{\delta \alpha}{r} + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.38}$$

con $g = \Delta g - \beta \Delta W$;

Etapa II

En el caso óptimo para el cual (3.37) y (3.38) tengan una única solución, una segunda aproximación de la superficie de la Tierra se obtiene en la forma

(i) para Γ_1

$$\Sigma_2 = \varphi_r(S^2) \qquad \text{con}$$

$$r = r_{(1)} + \zeta = r_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)^{-1}\left[\Delta g - \langle \underline{e}_\gamma , \nabla T_0 \varphi_{r_0} \rangle\right] \qquad ;$$

(ii) para Γ_2

$$\Sigma_2 = \varphi_r(S^2) \qquad \text{con}$$

$$r = r_{(1)} + \zeta = r_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\varphi_{r_0}\right)^{-1}\left[\Delta W - T_0\varphi_{r_0}\right] \qquad .$$

Como hemos visto en la sección precedente, en aproximación esférica, es decir con un potencial normal de referencia v esférico, los problemas de contorno (3.37) y (3.38) se convierten en el problema simple de Molodensky.

Todas las ecuaciones obtenidas en la sección 3.1 se identifican con sus correspondientes de esta sección (y viceversa), si observamos que las perturbaciones o derivadas $\dot{u}$, $\dot{r}$, $\dot{W}_s$ y $\dot{g}_s$ equivalen a los incrementos lagrangianos T , ζ , ΔW y Δg respectivamente; el papel de W en la sección 3.1 es el de v en el proceso de linealización en el Teluroide!.

Centremos por un momento nuestra atención en el problema (3.38). Si elegimos como U-potencial de referencia el potencial normal (véase Secc. 2.1), la condición de contorno de (3.38) puede simplificarse introduciendo las siguientes aproximaciones

$$\underline{e}_\gamma \doteq -\underline{\nu} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} \doteq -\gamma$$

con $\underline{\nu}$ vector unitario en la dirección normal al elipsoide.

Entonces, si designamos $\langle \underline{\nu} . \nabla T \rangle$ por $\frac{\partial T}{\partial h}$, tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} T = - \Delta g. \tag{3.39}$$

La expresión (3.39) es la conocida y clásica ecuación fundamental de la Geodesia Física (Heiskanen y Moritz, 1985; Ec. 2-147c). Es por este motivo por lo que en un principio el problema de Molodensky escalar se denominó "el verdadero problema de contorno de la Geodesia Física" (Sacerdote y Sansò, 1985).

3.3 TRANSFORMACION ANGULAR-POTENCIAL

En esta sección analizamos el método introducido en (Sacerdote y Sansò, 1986) para dar respuesta a la unicidad y resolubilidad del problema no-lineal (3.25). La idea esencial es la introducción de un nuevo sistema de coordenadas relacionado con el $\{x_i\}$ de tal modo que la superficie de la Tierra (desconocida en el espacio-x) se transforme en una superficie conocida con respecto a las nuevas coordenadas y así convertir el problema de frontera libre en uno de frontera conocida.

Como hemos visto en la sección 2.4, supuesto conocido el efecto de la rotación, esta técnica ya ha sido utilizada para el estudio del problema de Molodensky vectorial dando lugar al espacio de la gravedad por medio de la transformada de Legendre

$$y = \nabla u(x)$$

o al espacio de Marussi por medio de la transformación

$$y = u(x) \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$$

siendo u el potencial gravitatorio terrestre.

En ambos casos el problema de Molodensky vectorial se muestra equivalente al estudio de un problema de contorno no-lineal de tipo oblícuo con la introducción de las funciones auxiliares

$\psi(y) = \langle x, y\rangle - u(x)$ (potencial adjunto)

$\varphi(y) = \langle x, y\rangle$

respectivamente.

Es claro que ninguna de las transformaciones anteriores es útil para estudiar el problema de Molodensky escalar debido al desconocimiento de la dirección del vector gravedad sobre la superficie de la Tierra. En su lugar disponemos de las coordenadas angulares (θ,λ) como datos de contorno, de tal modo que con los datos (w_s , g_s , x/r) las dos posibles transformaciones válidas para la situación actual son

(a) $y = |\nabla w(x)| \frac{x}{|x|}$

(b) $y = w(x) \frac{x}{|x|}$

por medio de las cuales, la superficie de la Tierra se transforma en una superficie conocida en el espacio imagen (espacio-y).

Al igual que en (ibíd.) centraremos nuestra atención en la transformación (b) que denominaremos transformación angular-potencial. Además, consideraremos como función auxiliar el módulo del radio vector $r = |\underline{x}|$, única función desconocida para conocer completamente la geometría de la superficie terrestre, y que en función de y designaremos por $v(y)$.

A fin de garantizar una correspondencia biunívoca entre el espacio-x y el espacio-y por medio de la transformación angular potencial, es necesario también es éste caso suponer $\omega = 0$. En efecto, supongamos que la Tierra es una esfera homogénea en rotación de radio R ;entonces, su potencial gravífico es

$$W = \frac{kM}{r} + \frac{1}{2}\,\omega^2(x_1^2+x_2^2) \qquad r \geq R$$

con k constante gravitacional de Newton y M masa de la Tierra. Con los valores standard de k , M y w , si nos desplazamos a lo largo de la dirección $(\theta = \pi/2,\ \lambda = 0)$ podemos encontrar dos puntos $(R,0,0)$ y $(x_0,0,0)$ tales que (ver fig.3.3)

$$\begin{aligned} W(R,0,0) &= \frac{kM}{R} + \frac{1}{2}\,\omega^2 R^2 = \\ &= \frac{kM}{x_0} + \frac{1}{2}\,\omega^2 x_0^2 = \\ &= W(x_0,0,0) \end{aligned}$$

con $x_0 > R$.

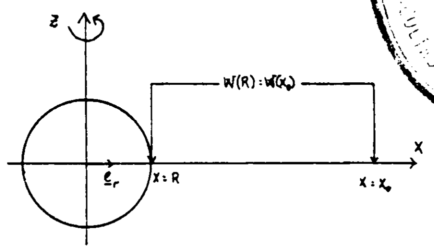

FIGURA 3.3

En otras palabras, dos puntos diferentes en la misma dirección tendrían igual potencial gravífico.

Así pues, en esta sección consideraremos el problema de Molodensky escalar <u>sin rotación</u>;los datos de contorno sobre S son ahora el potencial gravitatorio u_s y el modulo del vector gravedad gravitatorio que seguiremos designando por g_s . El problema se formula ahora de la siguiente manera

" dados u_s , g_s , encontrar una función $r: S^2 \to \mathbb{R}$ y una función u definida en Ω_r tales que

(i) $\Delta u = 0$ en Ω_r

(ii) $u_s = u \circ \varphi_r$

(iii) $g_s = |\nabla u_s \circ \varphi_r|$

(iv) $u = \frac{\alpha_u}{r} + O(r^{-3}) \quad r \to \infty$."

Con objeto de hacer más clara la exposición hemos dividido esta sección en dos apartados. En el primero, se establecen las condiciones que garantizan la biyectividad de la transformación angular-potencial;se obtiene también la ecuación en derivadas parciales, condición de contorno y comportamiento asintótico en el origen que w verifica en el dominio imagen. En el segundo apartado, por medio del teorema de inversión local en espacios de Banach, se estudia la unicidad y existencia de solución del problema de contorno no-lineal obtenido en el primer apartado en un entorno del caso esférico.

3.3.1 PROPIEDADES

Sea Ω_r un dominio exterior con frontera $\partial\Omega_r = \varphi_r(S^2)$ para alguna función regular $r: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea t una función armónica en Ω_r y regular en el infinito. En el siguiente teorema se establecen las condiciones bajo las cuales la transformación angular-potencial asociada a t

$$\ell_t : \overline{\Omega}_r \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \ell_t(x) = t(x)\frac{x}{|x|}$$

es una correspondencia uno-a-uno entre $\overline{\Omega}_r$ y su imagen. Designaremos por H_t el jacobiano de la transformación ℓ_t ;se observa que

$$t(x) = |\ell_t(x)| \ , \ \ell_t(x)/|\ell_t(x)| = x/|x| \ . \tag{3.40}$$

Teorema 3.1

Sean $r \in C^n(S^2)$, $t \in C^n(\overline{\Omega}_r)$ para algún $n \geq 2$,verificando

(i) $\Delta t = 0$ en Ω_r ; $t(x) = O(r^{-1}) \quad r = |x| \to \infty$

(ii) $t \neq 0$ sobre $\varphi_r(S^2)$

(iii) $t_r \neq 0$ en $\overline{\Omega}_r$

Si designamos por

$$\Gamma = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \ell_t(x) \quad x \in \varphi_r(S^2) \}$$

y Ω_t° es el dominio abierto acotado por Γ y $\Omega_t = \Omega_t^{\circ} - \{0\}$, se tiene

(iv) ℓ_t es un C^m-difeomorfismo de $\bar{\Omega}_r$ sobre $\Omega_t \cup \Gamma$;

(v) $w_t : \Omega_t \cup \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, $w_t(y) = |\ell_t^{-1}(y)| \in C^m(\Omega_t \cup \Gamma)$.

Demostración

En primer lugar veamos que las condiciones (i)-(iii) implican la existencia de H_t^{-1} en todo punto de $\bar{\Omega}_r$. Puesto que

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = D_j t \cdot \frac{x_i}{|x|} + \frac{t}{|x|} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right) \qquad (3.41)$$

la expresión del jacobiano de ℓ_t es

$$H_t = \frac{1}{|x|} \left[x^T \nabla t + t(I - P_x) \right] \qquad \text{con} \qquad P_x = \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2} \right). \qquad (3.42)$$

La matriz P_x (denominada "proyección sobre la dirección x "), tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} &1. \quad P_x = P_x^T \qquad \text{(simetría)} \\ &2. \quad P_x^2 = P_x \qquad \text{(idempotencia)} \qquad (3.43) \\ &3. \quad x(I - P_x) = 0 . \end{aligned}$$

Sea $x_0 \in \bar{\Omega}_r$;consideremos un sistema ortogonal de coordenadas $\{z_i^{\circ}\}$ con origen el del sistema de referencia general adoptado y eje z_3° en la dirección del radio vector de x_0 . Sea P_0 la matriz ortogonal relacionando ambos sistemas

$$\underline{z}^{\circ T} = P_0 \underline{x}^T$$

Puesto que

$$P_0 x_0^T = (0, 0, r_0)^T , \quad r_0 = |x_0|$$

$$P_0 (\nabla^T t(x_0)) = (v_1, v_2, t_r(x_0))$$

con v_1 , v_2 componentes de $\nabla t(x_0)$ en el plano $z_1^\circ z_2^\circ$, tenemos en x_0

$$P_0 H_t(x_0) P_0^T = \begin{pmatrix} \frac{t(x_0)}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t(x_0)}{r} & 0 \\ v_1 & v_2 & t_r(x_0) \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son $t(x_0)/r_0$ (de multiplicidad 2) y $t_r(x_0)$. Al ser la función t armónica en Ω_r y regular en el infinito, el principio del máximo junto con la condición (ii) implica que $t \neq 0$ en Ω_r . Entonces, los autovalores de $P H_t P_0^T$ en x_0 , idénticos a los de $H_t(x_0)$, son no nulos asegurando de ésta forma la invertibilidad de H_t en Ω_r .

Por otra parte, de la regularidad de t en $\bar{\Omega}_r$ y la estimación (Calderon and Zygmund, 1957)

$$|D_r Y_n(\tfrac{x}{|x|})| \leqslant C\, n^{\frac{1}{2}+r} \qquad |x| \geqslant 1$$

con Y_n armónico esférico normalizado de grado n y C constante dependiendo de r , se deduce que $\ell_t \in C^\infty(\bar{\Omega}_r)$.

La inyectividad de $\ell_t|_{\partial\Omega_r}$, permite considerar a Γ como la imagen de una C^∞-inmersión de S^2 en $\mathbb{R}^3$;concretamente

$$\Gamma = \varphi_t(S^2) \quad , \quad \varphi_t = \ell \circ \varphi_r$$

y Ω_t° es entonces un dominio acotado bien definido.

Al ser $t \neq 0$ en Ω_r , el origen de coordenadas en el espacio-Y pertenece a la frontera de $\ell_t(\Omega_r)$;además, en virtud del teorema de inversión local, la existencia de H_t^{-1} en Ω_r garantiza que la aplicación $\ell_t|_{\Omega_r}$ es abierta.Así pues tenemos

$$\ell(\Omega_r) = \Omega_t^\circ - \{0\} = \Omega_t \quad \text{con} \quad 0 \in \partial\Omega_t \,.$$

Por último, demostremos que $\ell|_{\Omega_r}$ es inyectiva que nos permitirá concluir que ℓ_t es un C^∞-difeomorfismo global de $\bar{\Omega}_r$ sobre

$\Omega_t \cup \Gamma$.

Consideremos dos puntos $x, y \in \Omega_r$ y supongamos $\ell_t(x) = \ell_t(y)$ es decir,

$$t(x)\frac{x}{|x|} = t(y)\frac{y}{|y|} .$$

Multiplicando la expresión anterior primero por $\frac{y^T}{|y|}$ y despues por $\frac{x^T}{|x|}$,obtenemos

$$t(x) = t(y)\cos\psi \quad , \quad t(x)\cos\psi = t(y)$$

siendo ψ el ángulo subtendido por los radio vectores de x e y . Entonces, es claro que $\cos\psi$ debe ser estrictamente positivo con $\cos^2\psi = 1$;finalmente, según (iii) y aplicando el teorema de Lagrange a la función t en el intervalo (x , y) se tiene $x = y$.

Para probar (v) basta con observar que

$$w_t(y) = |\ell_t^{-1}(y)| = \langle \ell_t^{-1}(y) , y/|y| \rangle$$

y que $\ell_t^{-1} \in C^m(\Omega_t \cup \Gamma)$.

En todo lo que sigue supondremos que las condiciones establecidas en el teorema anterior se verifican para el potencial gravitatorio terrestre con $m=2$. La transformada angular-potencial con respecto de u la designaremos por ℓ .

Como indicábamos en la introducción, el siguiente paso es obtener la ecuación en derivadas parciales que w_u , o simplemente w , verifica en Ω_u .

De (3.40) deducimos que

$$\ell^{-1}(y) = w(y)\frac{y}{|y|} \qquad (3.44)$$

y por tanto el jacobiano de ℓ^{-1} , que designaremos por K , viene dado por

$$K = \frac{1}{|y|}\left(y^T \nabla w + w(I - P_y)\right)$$

$$K = 1/|y| \left[y^T \nabla w + w(I-P_y) \right] \qquad (3.45)$$

Con $y = \ell(x)$, la expresión (3.42) puede también escribirse en la forma

$$H = \frac{y^T}{|y|} \nabla u(\ell^{-1}(y)) + \frac{|y|}{w(y)} (I-P_y).$$

Si tenemos en cuenta que $KH = I$, a partir de las expresiones obtenidas para K y H , obtenemos

$$\frac{1}{|y|}(y^T\nabla w + w(I-P_y))\left(\frac{y^T}{|y|}\nabla u(\ell^{-1}(y)) + \frac{|y|}{w(y)}(I-P_y)\right) = I$$

que se reduce a

$$I = \frac{y^T}{|y|} w_\rho \nabla u(\ell^{-1}(y)) + \frac{1}{w}(y^T\nabla w)(I-P_y) + (I-P_y) \qquad (3.46)$$

sin más que tener en cuenta las propiedades (3.43) de P_y . En la ecuación anterior w_ρ designa la derivada radial de w en el espacio- y . Observamos que la invertibilidad de K , asegurada por el teorema 3.1, implica necesariamente que $w_\rho \neq 0$.

Multiplicando por y a ambos lados de (3.46), obtenemos finalmente

$$\nabla u \circ \ell^{-1}(y) = \frac{1}{|y| w_\rho}\left(y - |y|^2 \frac{\nabla w}{w}(I-P_y)\right) \qquad (3.47)$$

y por consiguiente

$$K^{-1} = H = \frac{1}{w_\rho}\left[P_y - y^T \frac{\nabla w}{w}(I-P_y)\right] + \frac{|y|}{w}(I-P_y). \qquad (3.48)$$

Expresando el operador de Laplace en la forma

$$\Delta u = Tr(J(\nabla u))$$

con $J(\nabla u)$ el jacobiano de ∇u , y teniendo en cuenta que

$$J(\nabla u \circ \ell^{-1})(y) = J(\nabla u)(\ell^{-1}(y))\, K$$

en Ω_u se verifica

$$Tr\left[J(\nabla u \circ \ell^{-1})\, K^{-1}\right] = 0 \qquad (3.49)$$

Según (3.47) y (3.48), la expresión anterior se traduce en una ecuación en derivadas parciales para w en Ω_u .

Calculemos en primer lugar $\mathcal{J}(\nabla u \circ \ell^{-1})$. A fin de simplificar la notación , designemos por $\nabla_\sigma w$ la proyección del gradiente de w en un plano normal a la dirección radial. Efectuando la descomposición

$$\nabla w = \nabla_\sigma w + w_\rho \frac{y}{|y|} = \nabla_\sigma w + \nabla w P_y$$

tenemos

$$\nabla_\sigma w = \nabla w (I - P_y)$$

y entonces, las expresiones (3.47) y (3.48), pueden escribirse en la forma

$$\nabla u \circ \ell^{-1}(y) = \frac{1}{|y| w_\rho} \left(y - \frac{|y|^2}{w} \nabla_\sigma w \right) \tag{3.50}$$

$$K^{-1} = \frac{1}{w_\rho} \left(P_y - \frac{1}{w} y^T \nabla_\sigma w \right). \tag{3.51}$$

Después de laboriosas operaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\nabla u \circ \ell^{-1}) = {} & \left(\frac{1}{|y| w_\rho} + \frac{1}{w} \right)(I - P_y) - \frac{|y|}{w w_\rho} (I - P_y) M_w - \\ & - \frac{1}{w_\rho^2} (P_y M_w) - \frac{1}{|y| w w_\rho} (\nabla_\sigma^t w\, y) - \left(\frac{1}{|y|^2 w_\rho^2} - \frac{1}{|y| w w_\rho} \right)(y^T \nabla_\sigma w) + \\ & + \frac{1}{w w_\rho^2} \left(\nabla_\sigma^t w\, y\, M_w + \nabla_\sigma^t w\, \nabla_\sigma w \right) + \\ & + \frac{|y|}{w^2 w_\rho} (\nabla_\sigma^t w\, \nabla w). \end{aligned}$$

Multiplicando la expresión anterior por K^{-1}, tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\nabla u \circ \ell^{-1}) K^{-1} = {} & \left(\frac{1}{|y| w_\rho} + \frac{1}{w} \right)(I - P_y) - \frac{|y|}{w w_\rho} (I - P_y) M_w - \\ & - \frac{1}{w_\rho^2} (P_y M_w) - \frac{1}{|y| w w_\rho} (\nabla_\sigma^t w\, y) - \\ & - \left(\frac{1}{|y|^2 w_\rho^2} - \frac{1}{|y| w w_\rho} \right)(y^T \nabla_\sigma w) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{|y|\,w\,\omega_\rho^2}\left(\nabla_\sigma^t w\, y\right)+\left(\nabla_\sigma^t w\,\nabla_\sigma w\right)\left[\frac{|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}-\frac{1}{\omega^2\omega_\rho^3}\left(y M_\omega y^T\right)+\frac{|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}\right]-\\
&-\frac{|y|}{w}\left(\frac{1}{|y|^2\omega_\rho^2}-\frac{1}{|y|\,w\,\omega_\rho}\right)\left(y^T\nabla_\sigma w\right)+\frac{1}{w\,\omega_\rho^3}\left(\nabla_\sigma^t w\, y\, M_w P_y\right)+ \qquad (3.52)\\
&+\frac{|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}\left(\nabla_\sigma^t w\; y\, M_w\,(I-P_y)\right)+\frac{|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}\left(\nabla_\sigma^t w\,\nabla w\, P_y\right).
\end{aligned}
$$

Analicemos ahora la traza de cada una de las matrices que intervienen en (3.52):

$Tr[(I-P_y)] = 2$

$Tr[(I-P_y)M_w P_y] = 0$

$Tr[(I-P_y)M_w\, y^T\nabla_\sigma w] = \nabla_\sigma w\, M_w\, y^T$

$Tr[(I-P_y)M_w(I-P_y)] = Tr[(I-P_y)M_\omega]$

$Tr[P_y M_\omega P_y] = Tr[P_y M_\omega]$

$Tr[P_y M_\omega\, y^T\nabla_\sigma w] = 0$

$Tr[P_y M_\omega(I-P_y)] = 0$

$Tr[\nabla_\sigma^t w\,\nabla_\sigma w] = |\nabla_\sigma w|^2$

$Tr[y^T\nabla_\sigma w] = 0$

$Tr[\nabla_\sigma^t w\; y\, M_\omega P_y] = 0$

$Tr[\nabla_\sigma^t w\; y] = 0$

$Tr[\nabla_\sigma^t w\; y\, M_\omega(I-P_y)] = Tr[\nabla_\sigma^t w\; y\, M_\omega]$

$Tr[\nabla_\sigma^t w\,\nabla w\, P_y] = 0.$

Finalmente, según (3.49), la ecuación en derivadas parciales que w verifica en Ω_u es

$F[w] = 0$

con $F[w]$ definido por

$$F[w] = 2\frac{|y|}{w}\left(\frac{1}{|y|w_\rho} + \frac{1}{w}\right) + \frac{2|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}\left(\nabla_\sigma w\, M_\omega\, y^T\right) \tag{3.53}$$
$$- \frac{|y|^2}{\omega^2\omega_\rho}\mathrm{Tr}\left[(I-P_y)M_\omega\right] - \frac{1}{\omega_\rho^3}\mathrm{Tr}\left[P_y M_\omega\right] + |\nabla_\sigma \omega|^2\left[\frac{2|y|}{\omega^2\omega_\rho^2} - \frac{1}{\omega^2\omega_\rho^3}(y M_\omega y^T)\right].$$

Observando que

$$\mathrm{T_r}[P_y M_\omega] = \frac{1}{|y|^2}\left(y M_\omega y^T\right)$$

$$|\nabla_\sigma \omega|^2 = |\nabla w|^2 - w_\rho^2$$

$$\nabla w\, P_y = w_\rho \frac{y}{|y|}$$

el operador F admite tambien la expresión

$$F[w] = \frac{2}{\omega\,\omega_\rho} - \frac{|y|^2}{\omega^2 w_\rho}\Delta w - \left(\frac{1}{\omega_\rho^3\,|y|^2} + \frac{|\nabla\omega|^2}{\omega^2\omega_\rho^3}\right)(y\, M_\omega y^T) +$$
$$+ \frac{2|y|}{\omega^2\omega_\rho^2}\left(\nabla w\; M_\omega\, y^T\right) + \frac{2|y||\nabla\omega|^2}{\omega^2\omega_\rho^2}.$$

Puesto que en Ω_u $\omega^2\omega_\rho^3 \neq 0$ la ecuación que w verifica es equivalente a

$$\tilde{F}[w] = 0 \tag{3.54}$$

con $\tilde{F}$ definido por

$$\tilde{F}[w] = -|y|^2\omega_\rho^2\,\Delta w - \left(\frac{\omega^2}{|y|^2} + |\nabla\omega|^2\right)(y M_\omega y^T) + 2|y|\omega_\rho(\nabla\omega\, M_\omega\, y^T) + \tag{3.55}$$
$$+ 2|y|\,\omega_\rho\,|\nabla\omega|^2 + 2\omega\, w_\rho^2$$

(Sin que haya lugar a confusión designaremos a $\tilde{F}$ por F .)

Se comprueba fácilmente que las funciones $w_0 = \alpha/|y|$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) y $\omega_i = \frac{y_i}{|y|}$ $i=1,2,3$ son soluciones de (3.54).

Analicemos a continuación el comportamiento de w sobre Γ y su comportamiento asintótico en el origen.

(a) <u>Condición de contorno</u>.

El potencial gravitatorio terrestre u verifica sobre S

$|\nabla u| = g_s$

Entonces, en virtud de (3.47), la función w verifica sobre Γ

$$\frac{1}{|w_\rho|}\left(1+\frac{|y|^2}{w^2}|\nabla_\sigma w|^2\right)^{1/2} = g_s \ . \qquad (3.56)$$

De (3.47) podemos deducir que $u_r = w_\rho^{-1}$;por consiguiente, puesto que $u_r < 0$, w_ρ es también estrictamente negativa. Con esta observación y puesto que $1+\frac{|y|^2}{w^2}|\nabla_\sigma w|^2$ es una función distinta de cero en $\bar{\Omega}_u$, la condición de contorno (3.56) es equivalente a

$$B[w] = g_s^{-1}$$

con B definido por

$$B[w] = -w_\rho\left(1+\frac{|y|^2}{w^2}|\nabla_\sigma w|^2\right)^{-1/2} . \qquad (3.57)$$

(b) <u>Comportamiento asintótico en el origen.</u>

Del comportamiento asintótico de u en el infinito, se deduce

$$|y|\,|x| = \alpha_u + O(|x|^{-2}).$$

De esta forma, para cualquier función g definida en Ω_r y cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene

$$g(x) = O(|x|^{-\tau}) \quad |x| \to \infty \iff g \circ \ell^{-1}(y) = O(|y|^{\tau})$$

En particular, el comportamiento de w en el origen es

$$w = \frac{\alpha_u}{|y|} + O(|y|). \qquad (3.58)$$

Esta expresión muestra que w es singular en el origen, algo análogo a lo que le ocurría al potencial adjunto en el espacio de la gravedad.

Finalmente, con (3.54), (3.57) y (3.58), hemos demostrado que la función w verifica el problema de contorno no-lineal (tanto en la ecuación en derivadas parciales, como en la condición de contorno) siguiente

$$\begin{cases} F[w] = 0 & \Omega_u \\ B[w] = g_s^{-1} & \Gamma \\ w = \dfrac{\alpha_u}{|y|} + O(|y|) \quad |y| \to 0 . \end{cases} \tag{3.59}$$

A fin de eliminar la singularidad en el origen de w, se introduce en (Sacerdote y Sansò, 1986) una nueva función incógnita (análoga al potencial adjunto reducido en la teoría del problema de Molodensky vectorial) relacionada con w en la forma

$$\varphi(y) = |y|\, w(y). \tag{3.60}$$

De esta expresión se obtienen por cálculo directo las siguientes relaciones entre las primeras y segundas derivadas de w y φ :

$$\begin{aligned} & w_\rho = \frac{1}{|y|^2}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right) \qquad |\nabla w|^2 = \frac{1}{|y|^2}|\nabla_\sigma \varphi|^2 + \frac{1}{|y|^4}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)^2 \\ & |\nabla w|^2 = \frac{1}{|y|^2}|\nabla_\sigma \varphi|^2 + \frac{1}{|y|^4}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)^2 \\ & M_w = \frac{1}{|y|} M_\varphi - \frac{1}{|y|^3}\left(y^T \nabla\varphi + \nabla\varphi^T y\right) - \frac{\varphi}{|y|^3}\left(I - 3P_y\right) \\ & y M_w y^T = \frac{1}{|y|}\left(y M_\varphi y^T\right) - \frac{2}{|y|}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right) \\ & \nabla w M_w y^T = \frac{1}{|y|^2}\left(\nabla\varphi M_\varphi y^T\right) - \frac{|\nabla\varphi|^2}{|y|^2} - \frac{\varphi}{|y|^4}\left(y M_\varphi y^T\right) + \frac{\varphi^2}{|y|^4} - \\ & \qquad - \frac{1}{|y|^4}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)^2 + \frac{2\varphi}{|y|^4}\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Sustituyendo (3.61) en (3.55), (3.57) y (3.58) se obtiene la ecuación en derivadas parciales y condición de contorno que φ verifica en Ω_u y Γ ,

$$\begin{cases} G[\varphi] = -\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)^2 \Delta\varphi - |\nabla\varphi|^2\left(y M_\varphi y^T\right) + \\ \qquad + 2\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)\left(\nabla\varphi M_\varphi y^T\right) + 2\left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)|\nabla\varphi|^2 = 0 \qquad \text{en } \Omega_u & (3.62) \\ C[\varphi] = \left(|y|\varphi_\rho - \varphi\right)\cdot\left[1 + \dfrac{|y|^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right]^{-1/2} = -|y|^2/g_s \qquad \text{sobre } \Gamma. & (3.63) \end{cases}$$

Además, la función φ tiene ahora un comportamiento regularizado en un entorno del origen de la fórma

$$\varphi = \alpha_u + O(|y|^2)$$

y por tanto, φ puede extenderse de manera continua hasta el origen con

$$\nabla\varphi(0) = 0 .$$

En resumen, el problema de Molodensky escalar (en ausencia de rotación) se reduce, por medio de la transformación angular-potencial, a la resolución del problema de contorno

$$\begin{cases} G[\varphi] = 0 & \text{en } \Omega_u^0 \\ C[\varphi] = -|y|^2/g_s & \text{sobre } \Gamma \\ \nabla\varphi(0) = 0 . & \end{cases} \tag{3.64}$$

Finalizamos este apartado observando que las expresiones explícitas

$$y M_\varphi y^T = |y|^2 \varphi_{\rho\rho} \tag{3.65}$$

$$\nabla\varphi M_\varphi y^T = \frac{|y|}{2} \frac{\partial}{\partial\rho} (|\nabla\varphi|^2) \tag{3.66}$$

permiten escribir el operador G en la forma más compacta

$$G[\varphi] = -(\rho\varphi_\rho - \varphi)^2 \Delta\varphi - \rho^2 |\nabla\varphi|^2 \varphi_{\rho\rho} + \\ + \rho(\rho\varphi_\rho - \varphi) \frac{\partial}{\partial\rho} (|\nabla\varphi|^2) + 2(\rho\varphi_\rho - \varphi) |\nabla\varphi|^2 \tag{3.67}$$

con $\rho = |y|$.

Observaciones

1. Conviene indicar en este momento las principales diferencias en lo que se refiere a la metodología y resultados aquí obtenidos con aquellos de (Sacerdote y Sansò, 1986).

1.a La obtención de la ecuación en derivadas parciales que

w verifica en Ω_u es allí mucho más directa. En efecto, eligiendo (u , θ , λ) como coordenadas curvilíneas esféricas en el espacio-γ se obtiene facilmente (cfr. **Kinderlehrer** y **Niremberg**, 1977):

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_u} \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\left({r_\varphi}/{r_u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = -\left({r_\lambda}/{r_u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \lambda} .$$

De estas relaciones y la expresión del operador de Laplace en coordenadas esféricas (**Heiskanen y Moritz**, 1985; Ec. 1-41) se obtiene la ecuación deseada para w .

1.b Con esta manera de proceder el operador G adquiere una forma algo más complicada (**Sacerdote** y **Sansò**, 1986;Eq.3.14):

$$G[\varphi] := -\varphi^2 \Delta\varphi + (2\rho\varphi\varphi_\rho - \rho^2\varphi_\rho^2) \frac{1}{\rho^2} \Delta_\sigma \varphi +$$

$$+ (\rho\varphi_\rho - \varphi) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho^2 |\nabla_\sigma \varphi|^2) - \rho^2 \varphi_{\rho\rho} |\nabla_\sigma \varphi|^2 + 2\varphi\varphi_\rho^2 \qquad (3.68)$$

donde $\frac{1}{\rho^2} \Delta_\sigma \varphi$ designa la parte angular del operador de Laplace.

La expresión (3.67) que nosotrcs hemos obtenido tiene la siguiente ventaja sobre la expresión (3.68) (**véase** apartado 3.3.2): de (3.65) y (3.66) se deduce de manera casi inmediata la continuidad en el origen de cada uno de los sumandos que intervienen, para $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}_u^\circ)$. Por el contrario, algunos términos de (3.68), como por ejemplo $2\varphi\varphi_\rho^2$, presentan discontinuidad en el origen aún siendo funciones acotadas; esta situación exige definir el operador G sobre el subespacio $C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ)$ de funciones con gradiente nulo en el origen, a fin de evitar dicha discontinuidad (ver **Sacerdote** y **Sansò** (1986),Apéndice 2). Así pues, la expresión (3.67) pone de manifiesto con mayor claridad y realismo las propiedades de regularidad del operador G .

1.c La equivalencia entre (3.67) y (3.68) se demuestra fácilmente si consideramos las siguientes relaciones

$$\frac{1}{\rho^2}\Delta_\sigma\varphi = \Delta\varphi - \varphi_{\rho\rho} - \frac{2}{\rho}\varphi_\rho$$

$$|\nabla_\sigma\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 - \varphi_\rho^2 \, .$$

Se tiene entonces,

$$(3.68) = (3.67) + \Big[(2\rho\varphi\varphi_\rho - \rho^2\varphi_\rho^2)(-\varphi_{\rho\rho} - \frac{2}{\rho}\varphi_\rho) - 2\varphi_\rho^2(\rho\varphi_\rho - \varphi) -$$

$$- 2\rho(\rho\varphi_\rho - \varphi)\varphi_\rho\varphi_{\rho\rho} + \rho^2\varphi_{\rho\rho}\varphi_\rho^2 + 2\varphi\varphi_\rho^2\Big] .$$

Es fácil comprobar finalmente que la expresión entre corchetes es idénticamente nula.

2. Hemos preferido trabajar con el operador de contorno para w que surge al considerar g_s^{-1} y no g_s . El motivo es, principalmente, la descomposición que se obtiene en una parte lineal (ω_ρ y una no lineal ($(1+ \rho^2/\omega^2 |\nabla_\sigma w|^2)^{-1/2}$). Además, la componente lineal al introducir la función φ coincide con la ya conocida para el problema de Molodensky vectorial trabajando en el espacio de la gravedad: $\rho\varphi_\rho - \varphi$. (Cfr. también con Sansò, (1981b).)

3.3.2 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION DEL PROBLEMA NO LINEAL EN UN ENTORNO DEL CASO ESFERICO

Queremos ahora estudiar el problema de contorno (3.64) por medio del teorema de inversión local en espacios de Banach. A este fin es necesario formular el problema en un marco funcional adecuado y estudiar la manera de establecer datos iniciales convenientes en un entorno de los cuales buscar la solución.

Sea Ω un dominio exterior suficientemente regular con $0 \in \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ con forma de estrella con respecto del origen y tal que $\bar{\Omega}_r \subset \Omega$. Diremos que $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ es un $\mathcal{U}$ -potencial o potencial de referencia para el problema escalar si

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \ \Delta v = 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} \\
&\text{(ii)}\ \ v \neq 0 \quad \text{sobre } S^2 \ , v_r \neq 0 \ \text{en } \bar{\Omega} \qquad\qquad (3.69) \\
&\text{(iii)}\ \ \exists \alpha_v > 0 \ , \ v(x) = \frac{\alpha_v}{r} + O(r^{-3}) \, .
\end{aligned}
$$

Elegido un potencial de referencia v como aproximación del potencial gravitatorio terrestre u, definimos el Teluroide angular-potencial φ_{r_0} asociado a v de tal modo que $v \circ \varphi_{r_0} = u_s$. Supongamos que $\bar{\Omega}_{r_0} \subset \Omega$.

Según el teorema 3.1, las condiciones 3.69 garantizan que la transformación angular-potencial asociada a v,

$$\ell_v : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \ell_v(x) = v(x)\frac{x}{|x|}$$

es un C^∞-difeomorfismo global de $\bar{\Omega}$ sobre $\ell_v(\bar{\Omega})$. Así pues $\ell_v|_{\bar{\Omega}_{r_0}} = \ell_0$ transforma $\bar{\Omega}_{r_0}$ en $\Omega_v \cup \Sigma$, donde

$$\Sigma = \{ y \in \mathbb{R}^3 : \; y = \ell_v(x) \; , \; x \in \varphi_{r_0}(S^2) \}$$

Ω_v° dominio abierto acotado por Σ,

$\Omega_v = \Omega_v^\circ - \{0\}$.

Según la definición de φ_{r_0}, la superficie Σ coincide con $\Gamma = \ell(\partial\Omega_r)$, y entonces $\Omega_v^\circ = \Omega_u^\circ$ (ver Fig. 3.4).

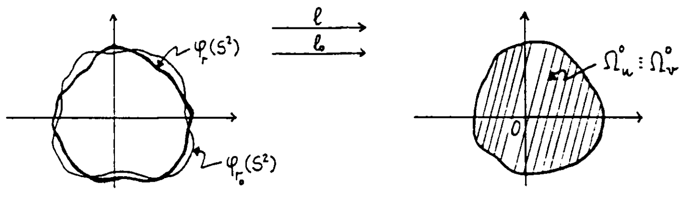

FIGURA 3.4

Con la elección $v = \alpha_v/r$ $(\alpha_v > 0)$, resulta $r_0 = \alpha_v/u_s$ y la superficie $\varphi_{r_0}(S^2)$ se denomina Teluroide esférico. Nos referiremos a este caso como "caso esférico". Observamos que las funciones w y φ asociadas a esta configuración vienen dadas por

$u_0 = |\varrho_0^{-1}| = \alpha_\nu/\varrho$

$\varphi_0 = \alpha_\nu$

que, como ya hemos visto, son soluciones de $F[\omega]=0$ y $G[\varphi]=0$ respectivamente.

Como veremos más adelante, no es posible garantizar ni la unicidad ni la resolubilidad incondicional del problema linealizado en un caso físicamente relevante como es el caso esférico;esto obliga, en modo totalmente análogo a como se hace en el estudio del problema de Molodensky vectorial en el espacio de la gravedad o en el espacio de Marussi, a reformular el problema en los términos siguientes:

"encontrar φ y $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{cases} G[\varphi] = 0 & \text{en } \Omega_u^\bullet \\ C[\varphi] = \dfrac{-\varrho^2}{g_s} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i \gamma_i & \text{sobre } \Gamma \\ \nabla\varphi(0) = 0 & ." \end{cases} \tag{3.70}$$

Esta nueva formulación, que añade tres nuevas incógnitas correspondiendo con el número de condiciones que φ debe verificar en el origen, permite encontrar una única solución en un entorno del caso esférico (y probablemente en un caso más general).

Concretemos ahora la regularidad que vamos a exigir a la solución. En todo lo que sigue supondremos que $\Gamma \in C^{2+\varepsilon}$ (que equivale a $u_s \in C^{2+\varepsilon}(S^2)$) para algún $\varepsilon \in (0,1)$. Consideremos el espacio de funciones

$$C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ) = \{\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\bullet) : \nabla\varphi(0) = 0\}$$

que al ser cerrado con respecto a la topología de $C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\bullet)$, es un subespacio de Banach con la norma inducida. Sea U el conjunto abierto

$$U = \{\varphi \in C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ) : \varphi > 0\}$$

$\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ los espacios de Banach

$$\mathcal{B}_1 = C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ) \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}_2 = C^{\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ) \times C^{1+\varepsilon}(\Gamma).$$

El problema de contorno modificado (3.70) puede plantearse, con la introducción de estos espacios funcionales, en la forma abstracta siguiente:

"encontrar $(\varphi, \underline{a}) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}_1$ verificando

$$P[\varphi, \underline{a}] = (0, -\rho^2/g_s) \tag{3.71}$$

donde P es el operador no-lineal $P: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{B}_2$ definido en la forma

$$P[\varphi, \underline{a}] = (P_1[\varphi, \underline{a}] , P_2[\varphi, \underline{a}]) \tag{3.72a}$$

con

$$P_1[\varphi, \underline{a}] = G[\varphi] \tag{3.72b}$$

$$P_2[\varphi, \underline{a}] = C[\varphi] - \langle \underline{a}, y \rangle \quad ." \tag{3.72c}$$

La restricción de P a $\mathcal{V}$, y por tanto la consideración de funciones φ positivas, es esencial para que este bien definido el operador de contorno $C[\cdot]$ (cfr.3.63). Además, la limitación a esta clase de funciones es en cierto modo natural por el propio significado físico de φ como producto de el potencial gravitatorio y el radio vector.

Para una elección concreta del potencial de referencia consideraremos $w_0 = |\ell_0^{-1}| \in C^{2+\varepsilon}(\Omega_u \cup \Gamma)$ y la función $\varphi_0 = \rho w_0$ que verifica

(i) $\varphi_0 \in \mathcal{U}$

(ii) $G[\varphi_0] = 0$ en Ω_u°

(iii) $C[\varphi_0] = \dfrac{-\rho^2}{\gamma_0}$ sobre Γ

con $\gamma_0 = |\nabla v_0 \, \ell_0^{-1}|$ módulo del vector gravedad de referencia sobre el Teluroide.

Con este planteamiento, si el operador P es localmente invertible en $(\varphi_0, \underline{0})$, existirán $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ de tal modo que si

$$\| \rho^2 (1/\gamma_0 - 1/g_s) \|_{C^{1+\varepsilon}(\Gamma)} < \varepsilon_1$$

existirá una única función $\varphi \in \mathcal{U}$ y un único vector $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$\| \varphi - \varphi_0 \|_{C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ)} + \sum_{i=1}^{3} |a_i| < \varepsilon_2$$

$$P[\varphi, \underline{a}] = (0, -\rho^2/g_s).$$

Observamos, que las condiciones $u_s \in C^{2+\varepsilon}$, $g_s \in C^{1+\varepsilon}$ necesarias para garantizar la existencia y unicidad de solución del problema de Molodensky escalar son más razonables que las recíprocas ($u_s \in C^{1+\varepsilon}$, $g_s \in C^{2+\varepsilon}$) y que surgen al estudiar el problema de Molodensky vectorial en el espacio de la gravedad. Esta ventaja es tambien característica en el estudio de dicho problema en el espacio de Marussi (cfr. sección 2.4).

A continuación vamos a estudiar si las condiciones que garantizan la invertibilidad local de P se verifican. Debemos comprobar,

1. $P[\varphi, \underline{a}] \in \mathcal{B}_2$, para todo $(\varphi, \underline{a}) \in \mathcal{V}$;
2. $P[\varphi, \underline{a}]$ es diferenciable con continuidad en $\mathcal{V}$;
3. $P'[\varphi_0, \underline{0}]$ es un operador lineal invertible de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ (caso esférico).

1. <u>$P[\varphi, \underline{a}] \in \mathcal{B}_2$, para todo $(\varphi, \underline{a}) \in \mathcal{V}$.</u>

1.a $G[\varphi] \in C^{\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ)$ si $\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_u^\circ)$.

Sea Φ el operador trilineal,

$$\Phi(\theta,\sigma,\lambda) := -(\rho\theta_\rho-\theta)(\rho\sigma_\rho-\sigma)\,\Delta\lambda - \rho^2\langle\nabla\theta,\nabla\sigma\rangle\lambda_{\rho\rho} +$$
$$+\,\rho(\rho\theta_\rho-\theta)\frac{\partial}{\partial\rho}(\langle\nabla\sigma,\nabla\lambda\rangle) + 2(\rho\theta_\rho-\theta)\langle\nabla\sigma,\nabla\lambda\rangle \qquad (3.73)$$

con θ , σ , $\lambda \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$. Puesto que

$$G[\varphi] = \Phi(\varphi,\varphi,\varphi)$$

el problema se reduce a estudiar la norma C^ε de Φ , que según el lema A.2 verifica la acotación

$$\|\Phi(\theta,\sigma,\lambda)\|_{C^\varepsilon(\bar{\Omega}^\circ_\omega)} \leq C\Big\{\|\rho\theta_\rho-\theta\|_\varepsilon\|\rho\sigma_\rho-\sigma\|_\varepsilon\|\Delta\lambda\|_\varepsilon + \|\langle\nabla\theta,\nabla\lambda\rangle\|_\varepsilon\|\rho^2\lambda_{\rho\rho}\|_\varepsilon +$$
$$+\,\|\rho\theta_\rho-\theta\|_\varepsilon\|\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\langle\nabla\sigma,\nabla\lambda\rangle)\|_\varepsilon + \|\rho\theta_\rho-\theta\|_\varepsilon\|\langle\nabla\sigma,\nabla\lambda\rangle\|_\varepsilon\Big\}.$$

En lo que sigue y por conveniencia notacional, la misma letra C será usada para designar constantes dependiendo de un mismo conjunto de parámetros. La dependencia concreta de C con respecto a algún parámetro será indicada en cada caso. Además, el subíndice $C^\varepsilon(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$ será eliminado siempre y cuando no haya lugar a confusión.

Estimemos a continuación cada uno de los factores que aparecen en la desigualdad anterior.

De $\theta_\rho = \langle\nabla\theta, \frac{y}{\rho}\rangle$, se deduce

$$\|(\rho\theta_\rho-\theta)\|_\varepsilon \leq C\Big\{\|\theta\|_{1+\varepsilon}\sum_i\|y_i\|_\varepsilon + \|\theta\|_\varepsilon\Big\}.$$

Si d designa el diámetro de Ω°_ω y $y, y' \in \Omega^\circ_\omega$ $(y \neq y')$, tenemos

$$|y_i| \leq d \ , \ |y_i - y'_i| \leq d^{1-\varepsilon}|y-y'|^\varepsilon$$

y por consiguiente

$$\|y_i\|_\varepsilon \leq d + d^{1-\varepsilon} < +\infty \qquad (\ \Omega^\circ_\omega \text{ acotado}).$$

Así pues,

$$\|(\rho\theta_\rho-\theta)\|_\varepsilon \leq C(d,\varepsilon)\,\|\theta\|_{2+\varepsilon}. \qquad (3.74)$$

Una estimación idéntica se verifica para $(\rho\sigma_\rho - \sigma)$.

En modo análogo podemos tambien obtener

$$\| \langle \nabla\theta, \nabla\sigma \rangle \|_{\varepsilon} \leq C \, \|\theta\|_{2+\varepsilon} \|\sigma\|_{2+\varepsilon} \tag{3.75}$$

$$\| \langle \nabla\sigma, \nabla\lambda \rangle \|_{\varepsilon} \leq C \, \|\sigma\|_{2+\varepsilon} \|\lambda\|_{2+\varepsilon} \tag{3.76}$$

$$\| \rho^2 \lambda_{\rho\rho} \|_{\varepsilon} \leq C(d,\varepsilon) \|\lambda\|_{2+\varepsilon} \tag{3.77}$$

$$\| \Delta\lambda \|_{\varepsilon} \leq C \, \|\lambda\|_{2+\varepsilon} \, . \tag{3.78}$$

Por último, la expresión

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\langle \nabla\sigma, \nabla\lambda \rangle) = \sum_{i,j} D_i\sigma \, y_j \, D_{ij}\lambda + \sum_{i,j} D_i\lambda \, y_j \, D_{ij}\sigma$$

permite escribir

$$\left\| \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\langle \nabla\sigma, \nabla\lambda \rangle) \right\|_{\varepsilon} \leq C(d,\varepsilon) \|\sigma\|_{2+\varepsilon} \|\lambda\|_{2+\varepsilon} \, .$$

Agrupando todas las estimaciones anteriores, obtenemos

$$\| \phi(\theta,\sigma,\lambda) \|_{\varepsilon} \leq C(\Omega^{\circ}_{\omega}, \varepsilon) \, \|\theta\|_{2+\varepsilon} \|\sigma\|_{2+\varepsilon} \|\lambda\|_{2+\varepsilon} \tag{3.79}$$

con C dependiendo del dominio Ω°_{ω} por medio de su diámetro d, y

$$\| G[\varphi] \|_{\varepsilon} \leq C(\Omega^{\circ}_{\omega}, \varepsilon) \|\varphi\|^3_{2+\varepsilon} \quad \text{con} \quad \varphi \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\circ}_{\omega}) \, . \tag{3.80}$$

Con este resultado se demuestra que $G[\varphi]$ está definido en $C^{\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\circ}_{\omega})$ no solo para funciones $\varphi \in \mathcal{U}$, sino también para todo φ en el espacio total $C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\circ}_{\omega})$.

1.b $C[\varphi] - \langle \underline{a}, y \rangle \in C^{1+\varepsilon}(\Gamma) \quad \forall \varphi \in \mathcal{U}, \ \underline{a} \in \mathbb{R}^3$.

En éste caso,

$$\| C[\varphi] - \langle \underline{a}, y \rangle \|_{C^{1+\varepsilon}(\Gamma)} \leq \| C[\varphi] \|_{C^{1+\varepsilon}(\Gamma)} + \sum_i |a_i| \, \|y_i\|_{C^{1+\varepsilon}(\Gamma)} \, .$$

De nuevo eliminaremos el subíndice $C^{1+\varepsilon}(\Gamma)$. Con respecto al segundo sumando, es claro que si $\Gamma \in C^{2+\varepsilon}$ el término $\|y_i\|_{1+\varepsilon}$ está acotado por una cierta constante que designaremos por K_{Γ} .

De (3.63) se sigue que

$$\|C[\varphi]\|_{1+\varepsilon} \leqslant C\, \|(\rho\varphi_\rho - \varphi)\|_{1+\varepsilon}\, \|(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2)^{-1/2}\|_{1+\varepsilon} \ .$$

Con un razonamiento análogo al realizado para obtener (3.74), podemos estimar el primer factor en la forma

$$\|(\rho\varphi_\rho - \varphi)\|_{1+\varepsilon} \leqslant C(K_\Gamma)\|\varphi\|_{2+\varepsilon} \tag{3.81}$$

con C dependiendo de la regularidad de Γ a través de K_Γ .

Por lo que respecta al segundo factor, analicemos en primer lugar $\|1/\varphi^2\|_a$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Puesto que φ es estrictamente positiva en el dominio acotado $\bar{\Omega}^\circ_\omega$, existirá una constante $r_1 > 0$ con $\varphi > r_1$ en dicho dominio; igualmente, existe un $r_2 > 0$ para el cual $\|\varphi\|_0 < r_2$. La función $1/\varphi^2$ puede expresarse en la forma $g \circ \varphi$ con g definida por

$$g: D(g) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad D(g) = \{t \in \mathbb{R} : r_1 < t < r_2\} \ , \quad g(t) = t^{-2} \ .$$

Evidentemente $g \in H^a(D(g))$, rango(φ) $\subset D(g)$, $\|\varphi\|_1 \leqslant M$ para algún M . De ésta forma, se verifican las condiciones del lema A.3 según el cual

$$\|1/\varphi^2\|_a \leqslant C\{\|g\|_a + \|g\|_1\|\varphi\|_a\} \leqslant C\{1+\|\varphi\|_a\} \qquad \forall a \geqslant 0$$

con C dependiendo de M y $\|g\|_a$.

Sea $v_\varphi = 1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2$; en base a la estimación anterior tenemos ($a \geqslant 0$),

$$\|v_\varphi\|_a \leqslant C\{1 + (1+\|\varphi\|_a)\|\rho^2|\nabla_\sigma\varphi|^2\|_a\} \ .$$

Por otra parte, de la identidad $|\nabla_\sigma\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 - \varphi_\rho^2$, se obtiene fácilmente

$$\|\rho^2|\nabla_\sigma\varphi|^2\|_a \leqslant C\,\|\varphi\|^2_{1+a} \tag{3.82}$$

entonces

$$\|v_\varphi\|_a \leqslant C(K_\Gamma, M, \|g\|_a)\{1+\|\varphi\|^3_{1+a}\} \ .$$

Sea ahora la función g' definida por

$$g' : D(g') \longrightarrow \mathbb{R} \qquad D(g') = \{t \in \mathbb{R} : r_1' < t < r_2'\} \qquad g'(t) = t^{-1/2}$$

con r_1' y r_2' tales que $v_\varphi > r_1' > 0$, $\|v_\varphi\|_0 < r_2'$ respectivamente. De nuevo tenemos

$$\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2} = g' \circ v_\varphi \quad , \text{ rango}(\ v_\varphi\ ) \subset D(g'),\ \|v_\varphi\|_1 \leq \mathcal{N}$$

para algún $\mathcal{N}$, y según el lema A.3 podemos escribir

$$\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2}\right\|_{1+\varepsilon} \leq C(K_\Gamma, \|g\|_{1+\varepsilon}, \|g'\|_{1+\varepsilon}, M, \mathcal{N})\{1+\|\varphi\|_{2+\varepsilon}^3\}. \tag{3.83}$$

Por último, a la vista de (3.81) y (3.83), tenemos para $C[\varphi]$ la siguiente estimación

$$\|C[\varphi]\|_{1+\varepsilon} \leq C(K_\Gamma, \|g\|_{1+\varepsilon}, \|g'\|_{1+\varepsilon}, M, \mathcal{N})\{\|\varphi\|_{2+\varepsilon} + \|\varphi\|_{2+\varepsilon}^4\} \tag{3.84}$$

y por consiguiente $C[\varphi] - \langle \underline{a}, y\rangle \in C^{1+\varepsilon}(\Gamma)$ si $\varphi \in \mathcal{U}$.

Tal y como anunciábamos, la restricción $\varphi > 0$ (que nos permite aplicar el lema A.3) es esencial para que $C[\varphi]$ esté bien definido.

2. <u>P es diferenciable con continuidad en $\mathcal{V}$.</u>

Sea $(\varphi, \underline{a}) \in \mathcal{V}$. Si designamos por $P_\varphi'[\varphi, \underline{a}]$ y $P_{\underline{a}}'(\varphi, \underline{a})$ las derivadas parciales de P con respecto de φ y $\underline{a}$ respectivamente, la diferencial total (derivada de Frechét) es el operador bilineal

$$P'[\varphi, \underline{a}](h, k) = P_\varphi'[\varphi, \underline{a}]h + P_{\underline{a}}'[\varphi, \underline{a}]k$$

con $(h, k) \in \mathcal{B}_1$.

Por definición,

$$P_{\underline{a}}'[\varphi, \underline{a}]k = \frac{d}{dt} P[\varphi, \underline{a} + tk]\Big|_{t=0} = (0, -\langle k, y\rangle)$$

que es un operador lineal y continuo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathcal{B}_2$;análogamente,

$$P'_{\varphi}[\varphi,\underline{a}]h = \frac{d}{ds}P[\varphi+sh,\underline{a}]\Big|_{s=0} = \left(\frac{dG(\varphi+sh)}{ds}\Big|_{s=0},\ \frac{dC(\varphi+sh)}{ds}\Big|_{s=0}\right).$$

Con objeto de simplificar el cálculo de dG/ds, introducimos de nuevo el operador trilineal Φ dado por (3.73). Entonces,

$$\begin{aligned} G[\varphi+sh] &= G[\varphi] + s\left[\Phi(\varphi,h,\varphi) + \Phi(h,\varphi,\varphi) + \Phi(\varphi,\varphi,h)\right] + \\ &+ s^2\left[\Phi(\varphi,h,h) + \Phi(h,h,\varphi) + \Phi(h,\varphi,h)\right] + \\ &+ s^3 G[h]. \end{aligned}$$

Derivando con respecto de s y particularizando el resultado en $s=0$, obtenemos

$$\frac{dG(\varphi+sh)}{ds}\Big|_{s=0} = L_{\varphi}[h] = \Phi(\varphi,h,\varphi) + \Phi(h,\varphi,\varphi) + \Phi(\varphi,\varphi,h). \tag{3.85}$$

De la expresión de Φ tenemos explicitamente

$$\begin{aligned} L_{\varphi}[h] &= \left\{2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)(\nabla\varphi M_h y^T) - (\rho\varphi_{\rho}-\varphi)^2\Delta h - |\nabla\varphi|^2(yM_h y^T)\right\} + \\ &+ \nabla h\left\{\left[-2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\Delta\varphi + 2|\nabla\varphi|^2 + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(|\nabla\varphi|^2)\right]y^T + \right. \\ &+ \left.\left[-2\rho^2\varphi_{\rho\rho} + 4(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\right]\nabla\varphi^T + 2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)M_{\varphi}y^T\right\} + \\ &+ h\left\{2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\Delta\varphi - 2|\nabla\varphi|^2 - \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(|\nabla\varphi|^2)\right\} = \\ &= \sum_{i,j} a^{ij}(\varphi)D_{ij}h + b^i(\varphi)D_i h + c(\varphi)h \end{aligned} \tag{3.86}$$

con

$$\begin{aligned} A &= (a^{ij}(\varphi)) = 2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\nabla\varphi^T y - (\rho\varphi_{\rho}-\varphi)^2 I - \rho^2|\nabla\varphi|^2 P_y \\ b^i(\varphi) &= y_i\left[-2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\Delta\varphi + 2|\nabla\varphi|^2 + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(|\nabla\varphi|^2)\right] + \\ &+ D_i\varphi\left[-2\rho^2\varphi_{\rho\rho} + 4(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\right] + 2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\sum_j D_{ij}\varphi\, y_i \\ c(\varphi) &= 2(\rho\varphi_{\rho}-\varphi)\Delta\varphi - 2|\nabla\varphi|^2 - \rho\frac{\partial}{\partial\rho}(|\nabla\varphi|^2). \end{aligned}$$

Por lo que respecta a la segunda componente de P', tenemos

$$\frac{dC[\varphi+sh]}{ds}\Big|_{s=0} = N_{\varphi}[h] = (\rho h_{\rho} - h)\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_{\sigma}\varphi|^2\right)^{-1/2} -$$

$$- \rho^2(\rho\varphi_\rho - \varphi)\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\left[\frac{1}{\varphi^2}\left(\langle\nabla\varphi,\nabla h\rangle - \varphi_\rho h_\rho\right) - \frac{1}{\varphi^3}|\nabla_\sigma\varphi|^2 h\right]. \qquad (3.87)$$

Reagrupando términos en $D_i h$ y h , el operador de contorno $N_\varphi[h]$ puede expresarse en la forma

$$N_\varphi[h] = \lambda(\varphi)h + \sum_i \beta^i(\varphi) D_i h = \lambda(\varphi)h + \langle \underline{\beta}(\varphi), \nabla h\rangle \qquad (3.88)$$

con

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi) &= \frac{|\nabla_\sigma\varphi|^2}{\varphi^3}\rho^2(\rho\varphi_\rho-\varphi)\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2} - \left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2} \\
\beta^i(\varphi) &= \gamma_i\left[\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2} + \frac{\rho\varphi_\rho}{\varphi^2}(\rho\varphi_\rho-\varphi)\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right] - \\
&\quad - D_i\varphi\left[\frac{\rho^2}{\varphi^2}(\rho\varphi_\rho-\varphi)\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right] = \beta_1(\varphi)\gamma_i + \beta_2(\varphi)D_i\varphi \qquad (3.89) \\
\underline{\beta}(\varphi) &= \beta_1(\varphi)\underline{\gamma} + \beta_2(\varphi)\nabla\varphi .
\end{aligned}$$

Observando las expresiones anteriores vemos que, en contraposición a lo que ocurre en el problema de Molodensky vectorial en el espacio de la gravedad o en el espacio de Marussi, la linealización del problema de Molodensky escalar da lugar a un operador de contorno en el cual no aparece la derivada radial pura: en efecto, hay también que considerar un término de la forma $\langle\nabla h, \nabla\varphi\rangle$.

Por último, demostremos que los operadores L_φ y N_φ son operadores continuos.

2.a <u>$L_\varphi \in \mathcal{L}\left(C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega),\ C^\varepsilon(\bar{\Omega}^\circ_\omega)\right)$.</u>

Sea $h \in C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$ con $\|h\|_{2+\varepsilon} = 1$. En virtud de (3.79) y (3.85), tenemos

$$\|L_\varphi[h]\|_\varepsilon \leq C(\Omega^\circ_\omega, \varepsilon)\,\|\varphi\|^2_{2+\varepsilon}$$

y puesto que $\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$ se obtiene el resultado deseado. Se observa que el operador L_φ es continuo en todo el espacio $C^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$ y no solo en el subespacio $C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$.

2.b <u>$N_\varphi \in \mathcal{L}\left(C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega),\ C^{1+\varepsilon}(\Gamma)\right)$</u> .

De la expresión obtenida para $\mathcal{N}_\varphi$, tenemos la siguiente estimación

$$\|\mathcal{N}_\varphi[h]\|_{1+\varepsilon} \leq C\left\{ \|\lambda(\varphi)\|_{1+\varepsilon}\|h\|_{1+\varepsilon} + \|h\|_{2+\varepsilon}\sum_i \|\beta^i(\varphi)\|_{1+\varepsilon}\right\}. \tag{3.90}$$

De los factores que intervienen en $\lambda(\varphi)$ y $\beta^i(\varphi)$, los únicos cuyas estimaciones no han sido obtenidas en 1. son $1/\varphi^3$ y $\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}$.

Puesto que $\varphi\in \mathcal{U}$, podemos aplicar nuevamente el lema A.3 y obtener

$$\|1/\varphi^3\|_{1+\varepsilon} \leq C\left(\|\varphi\|_1, \|g\|_{1+\varepsilon}\right)\left(1+\|\varphi\|_{1+\varepsilon}\right) \tag{3.91}$$

$$\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right\|_{1+\varepsilon} \leq C\left(\|\varphi\|_2, K_r, \|g\|_{1+\varepsilon}\right)\left(1+\|\varphi\|^3_{2+\varepsilon}\right) \tag{3.92}$$

con g igual a t^{-3} y $t^{-3/2}$ respectivamente. De este modo, a partir de (3.74), (3.82), (3.83), (3.91) y (3.92), tenemos

$$\begin{aligned}\|\lambda(\varphi)\|_{1+\varepsilon} \leq{}& C\left\{\|\rho^2|\nabla_\sigma\varphi|^2\|_{1+\varepsilon}\left\|\frac{1}{\varphi^3}\right\|_{1+\varepsilon}\|\rho\varphi_\rho-\varphi\|_{1+\varepsilon}\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right\|_{1+\varepsilon}+\right.\\ &\left.+\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2}\right\|_{1+\varepsilon}\right\} \leq \\ &\leq C\left\{\left(1+\|\varphi\|^3_{2+\varepsilon}\right)\left[1+\|\varphi\|^3_{2+\varepsilon}\left(1+\|\varphi\|_{1+\varepsilon}\right)\right]\right\} \leq C\left\{1+\|\varphi\|^7_{2+\varepsilon}\right\}\end{aligned}$$

con C dependiendo de K_r , $\|\varphi\|_2$ y $\|g\|_{1+\varepsilon}$ con $g(t)=t^{-3}, t^{-2}, t^{-1/2}, t^{-3/2}$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}\|\beta^i(\varphi)\|_{1+\varepsilon} \leq{}& C\left\{\|\gamma_i\|_{1+\varepsilon}\left[\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-1/2}\right\|_{1+\varepsilon} + \|1/\varphi^2\|_{1+\varepsilon}\|(\rho\varphi_\rho-\varphi)\|_{1+\varepsilon}\|\rho\varphi_\rho\|_{1+\varepsilon}\,\cdot\right.\right.\\ &\left.\cdot\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right\|_{1+\varepsilon}\right] + \left[\|\rho^2\|_{1+\varepsilon}\|1/\varphi^2\|_{1+\varepsilon}\|(\rho\varphi_\rho-\varphi)\|_{1+\varepsilon}\,\cdot\right.\\ &\left.\left.\cdot\left\|\left(1+\frac{\rho^2}{\varphi^2}|\nabla_\sigma\varphi|^2\right)^{-3/2}\right\|_{1+\varepsilon}\right]\|\varphi\|_{2+\varepsilon}\right\} \leq \\ &\leq C\left\{\left(1+\|\varphi\|^3_{2+\varepsilon}\right)+\left(1+\|\varphi\|_{1+\varepsilon}\right)\|\varphi\|^2_{2+\varepsilon}\left(1+\|\varphi\|^3_{2+\varepsilon}\right)\right\} \leq \\ &\leq C\left\{1+\|\varphi\|^6_{2+\varepsilon}\right\}\end{aligned}$$

con C dependiendo de las cantidades antes mencionadas. En ambas estimaciones, el resultado final ha sido obtenido aplicando la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad a,b \geq 0 \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad 1 \leq p,q \leq +\infty .$$

Regresando a (3.90), al ser $\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\Gamma)$, tenemos finalmente

$$\| N_\varphi[h] \|_{1+\varepsilon} \leq C \{ 1 + \|\varphi\|^7_{2+\varepsilon} \} \|h\|_{2+\varepsilon}$$

que con $\|h\|_{2+\varepsilon} = 1$ se convierte en

$$\| N_\varphi[h] \|_{1+\varepsilon} \leq C \{ 1 + \|\varphi\|^7_{2+\varepsilon} \}$$

demostrándose así la continuidad de N_φ .

Por último, para concluir que el operador P es diferenciable con continuidad resta comprobar que los operadores

$$P'_{\varphi_1} : U \longrightarrow \mathcal{L}(C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega), C^\varepsilon(\bar{\Omega}^\circ_\omega)) \qquad \varphi \longrightarrow L_\varphi$$

$$P'_{\varphi_2} : U \longrightarrow \mathcal{L}(C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega), C^{1+\varepsilon}(\Gamma)) \qquad \varphi \longrightarrow N_\varphi$$

son continuos en U . Aunque bastante laborioso, ésto se logra analizando cada uno de los términos de L_φ y N_φ con la técnica presentada en (Sacerdote y Sansò, 1986; Apéndice 2).

3. <u>Invertibilidad de $P'[\varphi_0,\varrho]$ (caso esférico).</u>

Elegido un cierto potencial de referencia v , la invertibilidad de $P'[\varphi_0,\varrho]$ con $\varphi_0 = \varrho\,|\ell_0^{-1}|$ está garantizada si y solo si el problema lineal de contorno

$$\begin{cases} L_{\varphi_0}[h] = f & \Omega^\circ_\omega \\ N_{\varphi_0}[h] = g + \langle \underline{k}, \underline{y} \rangle & \Gamma \end{cases} \tag{3.93}$$

admite una única solución $(h, \underline{a}) \in C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}^\circ_\omega) \times \mathbb{R}^3$ para todo $f \in C^\varepsilon(\bar{\Omega}^\circ_\omega)$ y $g \in C^{1+\varepsilon}(\Gamma)$.

En el caso esférico ($v = \frac{\alpha_v}{r}$, $\alpha_v > 0$, $\varphi_0 = \alpha_v$) se comprueba fácilmente que

$$L_{\varphi_0}[h] = -\alpha_v^2 \Delta h$$

$$N_{\varphi_0}[h] = \rho h_\rho - h$$

y el problema de contorno (3.93) se convierte en

$$\begin{cases} \Delta h = -f/\alpha_v^2 & \text{en } \Omega_\omega^\circ \\ \rho h_\rho - h = g + \langle \underline{k}, \gamma \rangle & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \tag{3.94}$$

Este problema de contorno ya nos ha aparecido al estudiar el problema de Molodensky vectorial en el espacio de la gravedad (cfr. Secc.2.4), y como allí vimos admite una única solución $(h, \underline{k}) \in$ $\in C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_\omega^\circ) \times \mathbb{R}^3$.

En definitiva, teniendo en cuenta los resultados parciales que hemos ido obteniendo, existe un cierto $C^{1+\varepsilon}$ -entorno de $\rho^2/\Upsilon_0 = \alpha_v$ tal que si ρ^2/g_s pertenece a dicho entorno, podemos encontrar una único φ próximo a α_v en $C_0^{2+\varepsilon}(\bar{\Omega}_\omega^\circ)$ y un único vector $\underline{a}$ próximo a $\underline{o}$ en $\mathbb{R}^3$ que resuelven el problema de contorno (3.70). El conocimiento de φ en $\bar{\Omega}_\omega^\circ$ nos permite finalmente determinar la forma de la superficie topográfica terrestre por medio de la expresión

$$r(\theta, \lambda) = \frac{1}{u_s(\theta,\lambda)} \varphi(u_s, \theta, \lambda) \in C^{2+\varepsilon}(S^2).$$

Observación

La modificación del problema de contorno (3.64) con la introducción en la condición de contorno del término $\langle \underline{a}, \gamma \rangle$, es imprescindible para garantizar que el problema lineal en el caso esférico (3.94) admite incondicionalmente una única solución.

3.4 ESTUDIO DE LA SOLUBILIDAD LOCAL GENERAL DEL PROBLEMA NO LINEAL POR MEDIO DEL TEOREMA DE NASH-HÖRMANDER

En esta última sección se analiza la existencia y unicidad del problema de Molodensky escalar por medio del teorema de la función implícita de Nash-Hörmander (ver Secc. 2.3).

A diferencia de la sección anterior consideraremos de nuevo el caso real $\omega \neq 0$. Además, como ya indicábamos en 3.1, nos centraremos en la formulación funcional del problema mediante el operador Φ_1, que designaremos simplemente por Φ :

$$\Phi(W_s, r) = (W_s, \Gamma(W_s, r))$$

con $\Gamma(W_s, r) = |\nabla W \circ \varphi_r|$

$$W = u + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 sen^2\theta$$

y u solución del problema de Dirichlet (3.27). La cuestión es resolver en r la ecuación funcional (3.26), es decir

$$\Phi(W_s, r) = (W_s, g_s).$$

La necesidad de estudiar esta ecuación por medio del teorema de Nash-Hörmander está justificada por la mencionada pérdida de diferenciabilidad de la inversa de la primera diferencial de Φ y que parece algo característico de los problemas de contorno de la Geodesia Física.

Antes de analizar si las condiciones bajo las cuales está establecido el teorema de Nash-Hörmander se verifican en este caso, es necesario de nuevo reformular el problema a fin de garantizar su resolubilidad para datos de contorno W_s , g_s arbitrarios y definir correctamente el operador Φ (cfr. final Secc. 1.3).

Sea r_0 el radio vector del Teluroide (angular-potencial, gravimétrico-potencial o cualquier otra buena aproximación de la superficie terrestre) asociado a un potencial de referencia V ;

emplearemos también la siguiente notación,

$$W_0 = v \circ \varphi_{r_0}$$

$$g_0 = |\nabla v \circ \varphi_{r_0}|$$

En todo lo que sigue supondremos que:

1. $\dfrac{\partial(|\nabla v|)}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\ ,\ g_0 \neq 0$ sobre S^2 ;

2. $\underline{e}_{g_0} = \dfrac{\nabla v \circ \varphi_{r_0}}{g_0}$ no es tangente a $\varphi_{r_0}(S^2)$;

3. el problema de contorno homogéneo de derivada oblícua regular,

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_{r_0} \\ \dot{u} \circ \varphi_{r_0} - \langle \underline{\alpha}_0 , \nabla \dot{u} \circ \varphi_{r_0} \rangle = 0 & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u}(x) = \alpha_{\dot{u}}/r + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.95}$$

donde

$$\underline{\alpha}_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)\left(\frac{\partial(|\nabla v|)}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right)^{-1} \underline{e}_{g_0}$$

admite como única solución la trivial $\dot{u} = 0$.

La última condición garantiza la inyectividad del operador $\Phi'(W_0, r_0)$; además, en virtud de la alternativa de Fredholm, el problema de contorno no homogéneo tendrá una única solución siempre y cuando f verifique tres condiciones linealmente independientes.

Consideremos tres funciones A_1 , A_2 , $A_3 \in C^\infty(S^2)$ de forma completamente análoga a como se hizo en el estudio del problema de Molodensky vectorial, es decir, tal que los armónicos de primer grado de las soluciones de los problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{en } \Omega_{r_0} \\ u_j \circ \varphi_{r_0} = A_j & \text{sobre } S^2 \\ u_j \to 0 & |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.96}$$

sean linealmente independientes,

De esta forma, el problema de Molodensky escalar, se puede plantear ahora en los términos siguientes:

" Sea $\varepsilon > 0$; si W_s , g_s son próximos a W_0 , g_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$, encontrar una función $r : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ próxima a r_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$ y constantes a_1 , a_2 , a_3 próximas a cero, tales que

(i) $W_0\varphi_r + \sum_{j=1}^{3} a_j A_j = W_s$

(ii) $|\nabla W_0\varphi_r| = g_s$

con W definido por (1.3) para alguna función armónica u en Ω_r verificando

(iii) $u = \alpha_0/r + O(r^{-3})$, $r \to \infty$."

Esta nueva reformulación permite definir correctamante el operador Φ . En efecto, para r próxima a r_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$, las soluciones $\{u_j^r\}$ de los problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_j^r = 0 & \text{en } \Omega_r \\ u_j^r \circ \varphi_r = A_j & \text{sobre } S^2 \qquad j = 1,2,3 \\ u_j^r \to 0 & |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.97}$$

verifican que sus armónicos de primer grado generan todo el espacio de armónicos de primer grado, y por consiguiente la solución u' del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 & \text{en } \Omega_r \\ u'\circ\varphi_r = W_s - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta & \text{sobre } S^2 \\ u' \to 0 & |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.98}$$

puede descomponerse de manera única en la forma

$$u' = u + \sum_{j=1}^{3} a_j u_j^r \tag{3.99}$$

con u sin componente armónica de primer grado en el infinito;es claro que si w_s es próximo a w_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$, las constantes $\{a_j\}$ son próximas a cero. Con la función u definida según (3.99), definimos el operador Φ en un $2+\varepsilon$ -entorno de w_s , r , de la forma

$$\Phi(w_s, r) = (w_s\ ,\ \Gamma(w_s, r))$$

$$\Gamma(w_s, r) = |\nabla w \circ \varphi_r|$$

donde $w = u + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$.

La linealización de este nuevo operador Φ se realiza de forma análoga a como se hizo en la sección 3.1. La única diferencia es la existencia de un término adicional $\sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j$ en la ecuación de $\dot{w}_s$,

$$\dot{w}_s = \dot{u}\circ\varphi_r + \langle \nabla w \circ \varphi_r\ ,\ g_r \rangle \dot{r} + \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j$$

resultando ahora que la condición de contorno que $\dot{u}$ verifica sobre $\varphi_r(S^2)$ es

$$\dot{u}\circ\varphi_r - \langle \underline{\alpha}\ ,\ \nabla\dot{u}\circ\varphi_r \rangle = \dot{w}_s - \alpha\,\dot{g}_s - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j\ .$$

Así pues el problema de contorno para $\dot{u}$ se convierte en

$$\begin{cases} \Delta\dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_r \\ \dot{u}\circ\varphi_r - \langle \underline{\alpha}\ ,\ \nabla\dot{u}\circ\varphi_r \rangle = f - \sum_{j=1}^{3} \dot{a}_j A_j & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u} = \alpha_i/r + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.100}$$

con $\underline{\alpha}$ y f dados por (3.11) y (3.12).

En las dos siguientes subsecciones analizamos la inversa de la primera diferencial y la segunda diferencial del operador Φ , con objeto de aplicar el teorema de Nash-Hörmander 2.5, 2.6 para resolver la ecuación funcional (3.26) asociada al operador Φ de finido arriba.

3.4.1 ESTIMACION DE LA INVERSA DE LA PRIMERA DIFERENCIAL

En lo que sigue supondremos que Φ es un operador de $C^\infty(S^1,\mathbb{R}) \times C^\infty(S^1,\mathbb{R}) = B$ en B, definido en un $H^{2+\varepsilon}$-entorno convexo V de (w_0, r_0) :

$$\Phi : B\cap V \longrightarrow B \quad , \quad (w_s, r) \longrightarrow (w_s, \Gamma(w_s, r))$$

Como es usual $C^\infty(S^1,\mathbb{R})$ designa el espacio de funciones reales infinitamente diferenciables definidas sobre la esfera unidad de referencia. La necesidad de trabajar en este espacio de funciones es la exigencia de la aplicación del teorema de Nash-Hörmander: el esquema de iteración por medio de operadores regularizantes da lugar a aproximaciones que son funciones C^∞, resultando éste el marco natural en el que debe ser formulado el teorema.

Con respecto a la primera diferencial de Φ, sabemos que

$$\Phi'(w_s, r) : B \longrightarrow B \quad , \quad (w_s, r) \in B\cap V$$

$$(\dot{w}_s, \dot{r}) \longrightarrow (\dot{w}_s\, , \langle \underline{e}_g, \nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle + (\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r)\dot{r})$$

con $\dot{u}$ verificando (3.6) . El teorema de existencia 2.5 exige que $\Phi'(w_s,r)$ tenga inversa por la derecha, que designaremos por $\Psi(w_s,r)$, verificando (2.44). La expresión formal de $\Psi(w_s,r)$ viene dada por (3.14), es decir

$$\Psi(w_s,r)(\dot{w}_s,\dot{g}_s) = (\dot{w}_s,\dot{r})$$

con

$$\dot{r} = (\dot{g}_s - \langle \underline{e}_g, \nabla\dot{u}\circ\varphi_r\rangle)\left(\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r\right)^{-1}$$

y existirá siempre y cuando el problema de contorno (3.100) admita una única solución.

Observamos que, a diferencia del teorema de la función inversa en espacios de Banach, la invertibilidad de Φ' debe exigirse para todo $(w_s, r) \in V'$ y no solo en el punto inicial (w_0, r_0) en un entorno del cual se busca la solución.

El plan de trabajo para obtener la estimación (2.44) para $\Psi(w_s, r)$ será el siguiente:

1. Estimaciones tipo Schauder para $D^\alpha W \circ \varphi_r$, que requiere un estudio detallado del problema de Dirichlet en Ω_r para funciones armónicas y regulares en el infinito;

2. Aplicación de los resultados obtenidos en 1. para estimar $\Gamma(w_s, r)$, $\underline{\alpha}$ y f ;

3. Existencia y unicidad de solución del problema de contorno (3.100) y estimación de la λ -norma de $\nabla u \circ \varphi_r$;

4. Estimación de $\Psi(w_s, r)$

1. <u>Problema de Dirichlet en Ω_r .</u>

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_r \\ u \circ \varphi_r = U_0 & \text{sobre } S^2 \\ u \to 0 & |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.101}$$

El objetivo es obtener estimaciones de Hölder para $D^\alpha u \circ \varphi_r$ con α cualquier multiíndice, y r próximo a r_0 en $H^{2+\epsilon}(S^2)$. Consideremos la aplicación

$$\varphi_{\tilde{r}} : S^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad (\sigma, t) \longrightarrow (r(\sigma) + t)\, \underline{e}_r = \tilde{r}(\sigma)\, \underline{e}_r$$

Si escribimos (formalmente)

$$y_1 = \theta \ , \ y_2 = \lambda \ , \ y_3 = t$$

se deduce fácilmente que el determinante del jacobiano de la transformación anterior es

$$\det\left[J(\varphi_{\tilde{r}})\right] = \det\left(\partial x_i / \partial y_j\right) = (r(\sigma) + t)^2 \operatorname{sen}\theta$$

que, para r suficientemente próximo a r_0, es estrictamente positivo excepto en los polos donde se anula. Este inconveniente puede evitarse subdividiendo la esfera en dos hemisferios por la línea de los polos y definiendo en cada uno de ellos una nueva colatitud con respecto a ejes que no los corten, resultando de esta forma $\operatorname{sen}\theta$ distinto de cero en cada uno de ellos. Así pues, $\varphi_{\tilde{r}}$ es un difeomorfismo de $S^2\times[0,1]$ sobre $\{x\in\mathbb{R}^3 : x=(r(\sigma)+t)\underline{e}_r,\ t\in[0,1],\ \sigma\in S^2\}$.

Si identificamos $S^2\times[0,1]$ con $N=\{x: 1\leq|x|\leq 2\}$ por medio de la aplicación

$$(\sigma,t)\longleftrightarrow(1+t)\sigma \quad , \quad \sigma\in S^2,\ t\in[0,1]$$

(cfr. Hörmander, 1976), es claro que $\varphi_{\tilde{r}}$ (considerada ahora como una aplicación de N en $\mathbb{R}^3$) induce una métrica Riemanniana sobre N : $\langle d\varphi_{\tilde{r}}, d\varphi_{\tilde{r}}\rangle_{\mathbb{R}^3}$ (véase, Fig. 3.5).

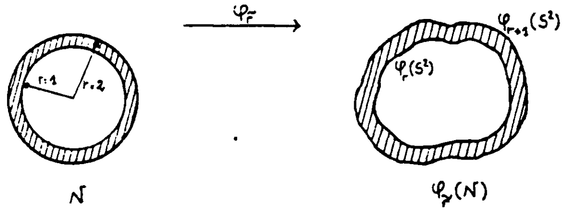

FIGURA 3.5

Las componentes del tensor métrico con respecto a las coordenadas euclídeas vienen dadas por (Helgason, 1962),

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_{\tilde{r}})_k\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_{\tilde{r}})_k \, . \tag{3.102}$$

Designaremos por $\tilde{g}$ el determinante de (g_{ij}) .

Puesto que $\Delta u=0$ en Ω_r , la función $U=u\circ\varphi_{\tilde{r}}$ verifica en $\mathcal{N}$ la ecuación de Laplace-Beltrami con respecto a la métrica (g_{ij}) , esto es (con el convenio de suma sobre índices repetidos)

$$\Delta_{\mathcal{N}} U = \bar{g}^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{g}^{1/2} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{g}^{1/2} g^{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{3.103}$$

donde (g^{ij}) es la matriz inversa del tensor métrico (véase ibid.).

En el siguiente lema estimamos $\|g_{ij}\|_\lambda$ y la λ -norma de los coeficientes del operador de Laplace-Beltrami sobre $\mathcal{N}$, para $\lambda \geq 0$ arbitrario.

<u>Lema 3.2</u>

Si r es próximo a r_0 en $H^{2+\varepsilon}(S^2)$, existe una constante C tal que,

(i) $\|g_{ij}\|_\lambda \leq C \|r\|_{1+\lambda}$

(ii) $\|A_{ij}\|_\lambda \leq C \|r\|_{1+\lambda}$ con $A_{ij} = \bar{g}^{1/2} \cdot g^{ij}$

<u>Demostración</u>

De la expresión (3.102), obtenemos

$$\|g_{ij}\|_\lambda \leq \sum_{k=1}^{3} \left\{ \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_r)_k\right\|_\lambda \left\|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_r)_k\right\|_0 + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_r)_k\right\|_0 \left\|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_r)_k\right\|_\lambda \right\} \leq$$

$$\leq C \|\varphi_r\|_1 \|\varphi_r\|_{1+\lambda} .$$

Del mismo modo,

$$\|\varphi_r\|_\mu \leq C\{1 + \|r\|_\mu\} \ , \ \mu \geq 0 .$$

Haciendo $\mu = 1$ y $\mu = 1+\lambda$, tenemos entonces

$$\|g_{ij}\|_\lambda \leq C\{1+\|r\|_1\}\{1+\|r\|_{1+\lambda}\} \leq C\{1+\|r\|_{1+\lambda}\}$$

sin más que observar que $\|r\|_1$ está uniformemente acotada.

Por otra parte, si suponemos que $\|r\|_0$ tiene una cota inferior uniforme,

$$\|r_0\| \geq k > 0 \Rightarrow 1/k \, \|r\|_0 \geq 1$$

y por consiguiente

$$\|g_{ij}\|_\lambda \leq C \, \|r\|_{1+\lambda} .$$

(ii) Puesto que $\|r\|_2$ está uniformemente acotada, del apartado anterior deducimos que $\|g_{ij}\|_1 \leq M$ para algún M . Consideremos la función

$$\bar{g} = G(v_{11}, \dots, v_{33}) = G \circ v$$

con G función determinante, $v = (v_{ij})$, $v_{ij} = g_{ij}$ $i, j = 1,2,3$:

$$\mathcal{N} \xrightarrow{v} \mathbb{R}^9 \xrightarrow{G} \mathbb{R} \ , \quad y \to (g_{ij}(y)) \longrightarrow \det (g_{ij}(y))$$

Al ser G una función regular, según el lema A.3 existirá una constante C -dependiendo de M - tal que

$$\|\bar{g}\|_\lambda \leq C \{ \|G\|_\lambda + \|G\|_1 \sum_{i,j} \|v_{ij}\|_\lambda \} \leq C \, \|r\|_{1+\lambda} .$$

Teniendo en cuenta que $\bar{g} > \tilde{\varepsilon} > 0$ para algún $\tilde{\varepsilon}$, podremos de nuevo aplicar el lema mencionado (en modo análogo a como se hizo en 3.3.2) a $\bar{g}^{1/2}$ y g^{ij} , obteniéndose estimaciones similares a la anterior. Finalmente,

$$\|A_{ij}\|_\lambda \leq C \{ \|\bar{g}^{1/2}\|_\lambda \|g^{ij}\|_0 + \|\bar{g}^{1/2}\|_0 \|g^{ij}\|_\lambda \} \leq$$
$$\leq C \{ \|r\|_1 \, \|r\|_{1+\lambda} \} \leq C \, \|r\|_{1+\lambda} .$$

Consideremos ahora el problema de contorno mixto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \dfrac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 & \text{en } \mathcal{N} \\ U = U_0 & \text{sobre } S^2 \\ U = u \circ \varphi_{r+1} & \text{sobre } \Sigma = \{ x : |x| = 2 \} . \end{cases}$$

Según el teorema A.5 con $\Omega : \mathcal{N}$, $\Sigma_0 : S^2$, $\Sigma_1 : \Sigma$, $g_0 : U_0$, $g_1 : u\circ\varphi_{r+1}$, $B_j : 0$ $(j:1,2,3)$, $B_0 : 1$, podemos escribir

$$\|U\|_{1+\lambda;\mathcal{N}} \leq C(\lambda)\Big\{ \|U_0\|_{1+\lambda;S^2} + \|u\circ\varphi_{r+1}\|_{1+\lambda;S^2} +$$
$$+ \left(\|U_0\|_{1+\varepsilon;S^2} + \|u\circ\varphi_{r+1}\|_{1+\varepsilon;S^2} \right) \sum \|A_{ij}\|_{\lambda;\mathcal{N}} \Big\}. \qquad (3.104)$$

Aquí $\lambda > 0$ no es un entero.

Estimemos $\|u\circ\varphi_{r+1}\|_{\mu;\Sigma}$. Según el principio del máximo, el problema de Dirichlet (3.101) tiene una única solución verificando $\|u\|_{0;\Omega_r} \leq \|U\|_{0;S^2}$. Por otra parte, sobre cualquier subconjunto compacto Ω' de Ω_r se tiene para cualquier multiíndice α

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{3|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega_r} |u| \ , \quad d : \mathrm{dist}\,(\Omega', \varphi_r(S^2))$$

(Gilbarg y Trudinger, 1977; Th. 2.10). Así pues, eligiendo Ω' de tal modo que contenga completamente a $\varphi_{r+1}(S^2)$ y haciendo uso del lema A.3 sobre estimaciones de Hölder para funciones compuestas, tenemos

$$\|U\|_{\mu;\Sigma} : \|u\circ\varphi_{r+1}\|_{\mu;S^2} \leq C\Big\{ \|u\|_{\mu;\varphi_{r+1}(S^2)} + \|u\|_{1;\varphi_{r+1}(S^2)} \|\varphi_{r+1}\|_\mu \Big\} \leq$$
$$\leq C\Big\{ \|U_0\|_{0;S^2} + \|U_0\|_{0;S^2}(1 + \|r\|_\mu)\Big\} \leq$$
$$\leq C\,\|U_0\|_{0;S^2} \|r\|_\mu \ , \quad \mu > 0. \qquad (3.105)$$

Sustituyendo las estimaciones obtenidas para A_{ij} y la estimación (3.105) con $\mu : 1+\lambda, 1+\varepsilon$ en (3.104), obtenemos finalmente

$$\|U\|_{1+\lambda;\mathcal{N}} \leq C\Big\{ \|U_0\|_{1+\lambda;S^2} + \|U_0\|_{0;S^2} \|r\|_{1+\lambda} +$$
$$+ \left(\|U\|_{1+\varepsilon;S^2} + \|U_0\|_{0;S^2} \|r\|_{1+\varepsilon} \right) \|r\|_{1+\lambda} \Big\} \leq$$
$$\leq C\Big\{ \|U_0\|_{1+\lambda;S^2} + \|U_0\|_{1+\varepsilon;S^2} \|r\|_{1+\lambda} \Big\}. \qquad (3.106)$$

En el siguiente lema establecemos la estimación de $D^\alpha u\circ\varphi_r$ con u solución de (3.101).

Lema 3.3

Sea u solución del problema de Dirichlet (3.101). Si $|\alpha| < 1+\lambda$ con $\lambda > 0$ no entero, existe una constante C tal que

$$\| D^{\alpha} u \circ \varphi_{r} \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \left\{ \| U_0 \|_{1+\lambda} + \| U_0 \|_{1+\varepsilon} \| r \|_{1+\lambda} \right\}$$

Demostración

Veamos en primer lugar que para cualquier multiíndice α $D^{\alpha} u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}} = \delta^{\alpha} U$ con

$$\delta = (\delta_j)_{j=1,2,3} \quad , \quad \delta_j = \sum_{k=1}^{3} C_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

donde C_{jk} son los elementos de la matriz inversa de la traspuesta del jacobiano de $\varphi_{\underset{\sim}{r}}$.

Procederemos por inducción sobre $|\alpha|$. Puesto que $U = u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}}$, para $|\alpha| = 1$ se tiene

$$\nabla U = (\nabla u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}}) \mathcal{J}(\varphi_{\underset{\sim}{r}}) \quad \Rightarrow \quad D_j u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}} = \sum_{k=1}^{3} C_{jk} \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

verificándose por tanto lo que queremos probar.

Supongamos que $D^{\alpha} u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}} = \delta^{\alpha} U$ es cierto para $|\alpha| = m$; de nuevo tendremos

$$\nabla (D^{\alpha} u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}}) = [\nabla (D^{\alpha} u) \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}}] \mathcal{J}(\varphi_{\underset{\sim}{r}}) = \nabla (\delta^{\alpha} U)$$

es decir

$$D_j (D^{\alpha} u) \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}} = \sum_{k=1}^{3} C_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta^{\alpha} U) = \delta_j (\delta^{\alpha} U) \quad , \quad \forall j = 1,2,3 \, .$$

Esta última igualdad muestra que $D^{\alpha} u \circ \varphi_{\underset{\sim}{r}} = \delta^{\alpha} U$ con $|\alpha| = m+1$.

Puesto que $D^{\alpha} u \circ \varphi_{r}$ es la restricción de $\delta^{\alpha} U$ a 6^{2} , el siguiente paso es estimar $\delta^{\alpha} U$. Queremos demostrar que

$$\| \delta^{\alpha} U \|_{\mu} \leq C \{ \| U \|_{\mu+|\alpha|} + \| r \|_{\mu+|\alpha|} \| U \|_{1} \} \quad , \quad \mu > 0 \, . \tag{3.107}$$

Procedamos de nuevo por inducción sobre el orden del multiíndice.

Si $|\alpha| = 1$,

$$\delta^{\alpha} U = \sum_{k=1}^{3} C_{jk} \frac{\partial U}{\partial x_k} \qquad j = 1,2,3$$

y entonces

$$\|\delta^{\alpha} U\|_{\mu} \leq \sum_{k=1}^{3} \left\{ \|C_{jk}\|_{\mu} \|U\|_{1;N} + \|C_{jk}\|_{0} \|U\|_{1+\mu;N} \right\} \tag{3.108}$$

Estimaciones análogas a las obtenidas en el lema 3.2 son válidas para C_{jk} , por tanto

$$\|C_{jk}\|_{\lambda} \leq C \|r\|_{1+\lambda} \ , \quad \lambda \geq 0 \ .$$

Particularizando esta desigualdad para $\lambda = \mu$, $\lambda = 0$ y sustituyendo en (3.108) resulta

$$\|\delta^{\alpha} U\|_{\mu} \leq C\left\{ \|r\|_{1} \|U\|_{1+\mu;N} + \|r\|_{1+\mu} \|U\|_{1;N} \right\} \leq C\left\{ \|U\|_{1+\mu;N} + \|r\|_{1+\mu} \|U\|_{1;N} \right\}$$

que es (3.107) con $|\alpha| = 1$.

Supongamos que (3.107) es cierta para $|\beta| = m$ y sea $|\alpha| = m+1$. Entonces, existe algún $j = 1,2,3$ tal que $\delta^{\alpha} U = \delta^{\beta}(\delta_j U)$. Teniendo en cuenta que (3.107) se verifica para $|\beta| = m$ y $|\beta| = 1$, podemos escribir

$$\|\delta^{\alpha} U\|_{\mu} = \|\delta^{\beta}(\delta_j U)\|_{\mu} \leq C\left\{ \|\delta_j U\|_{\mu+m} + \|r\|_{\mu+m} \|\delta_j U\|_{1} \right\} \leq$$

$$\leq C\left\{ \|U\|_{1+\mu+m} + \|r\|_{1+\mu+m} \|U\|_{1} + \|r\|_{\mu+m}\left(\|U\|_{2} + \|r\|_{2} \|U\|_{1} \right) \right\}$$

y al estar $\|r\|_2$ acotada uniformemente, tenemos

$$\|\delta^{\alpha} U\|_{\mu} \leq C\left\{ \|U\|_{1+\mu+m} + \|r\|_{1+\mu+m} \|U\|_{1} + \left(\|r\|_{\mu+m} \|U\|_{2} \right) \right\} . \tag{3.109}$$

Con objeto de estimar $\|r\|_{\mu+m} \|U\|_{2}$ haremos uso del lema de interpolación A.4 con $a_1 = 1$, $a_2 = 1+\mu+m$, $b_1 = 1+\mu+m$, $b_2 = 1$. Puesto que el punto $(\mu+m, 2)$ pertenece al segmento que une los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2), tenemos entonces

$$\|r\|_{\mu+m} \|U\|_{2} \leq C\left\{ \|r\|_{1} \|U\|_{1+\mu+m} + \|r\|_{1+\mu+m} \|U\|_{1} \right\} \leq C\left\{ \|U\|_{1+\mu+m} + \|r\|_{1+\mu+m} \|U\|_{1} \right\} .$$

Por último, teniendo en cuenta esta estimación, (3.109) se convierte en (3.107) con $|\alpha| = 1+m$.

Si en (3.107) hacemos $\mu = 1+\lambda-|\alpha|$, obtenemos

$$\| D^{\alpha} u_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \{ \| U \|_{1+\lambda;\sigma} + \| \Gamma \|_{1+\lambda} \| U \|_{1;\sigma} \}$$

y haciendo uso de (3.106) concluimos

$$\| D^{\alpha} u_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \{ \| U_0 \|_{1+\lambda} + \| U_0 \|_{1+\varepsilon} \| \Gamma \|_{1+\lambda} \}$$

que es el resultado deseado.

Como aplicación del lema 3.3 estimemos $\| D^{\alpha} W_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|}$ con W definida en la introducción de esta sección.

Con $U_0 = W_s - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ y $U_0 = \{A_j\}$, las funciones u' y $\{u_j^r\}$ soluciones de los problemas de Dirichlet (3.97) y (3.98) respectivamente, verifican las acotaciones

$$\begin{aligned} &\| D^{\alpha} u'_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \{ \| W_s \|_{1+\lambda} + \| \Gamma \|_{1+\lambda} \} \\ &\| D^{\alpha} u_j^r {}_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \| \Gamma \|_{1+\lambda} . \end{aligned} \qquad 1+\lambda > |\alpha|$$

Entonces, la función u definida por (3.99) verifica

$$\| D^{\alpha} u_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \{ \| W_s \|_{1+\lambda} + \| \Gamma \|_{1+\lambda} \} \left(1 + \sum_j |a_j| \right) . \qquad 1+\lambda > |\alpha|$$

La independencia lineal de los armónicos de primer grado de $\{u_j^r\}$, permite obtener las constantes $\{a_j\}$ en función de los coeficientes armónicos de primer grado de $\{u_j^r\}$ y u' , los cuales están acotados uniformemente por $\| A_j \|_0$ y $\| W_s - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \|_0$ respectivamente. Entonces,

$$\| D^{\alpha} u_{\circ} \varphi_r \|_{1+\lambda-|\alpha|} \leq C \{ \| W_s \|_{1+\lambda} + \| \Gamma \|_{1+\lambda} \} \quad , \qquad 1+\lambda > |\alpha| . \qquad (3.110)$$

Una estimación análoga es válida para $D^{\alpha} W_{\circ} \varphi_r$. En particular, si $|\alpha| = 1$ se obtiene la siguiente estimación para el vector gravedad

$$\| \nabla W_{\circ} \varphi_r \|_{\lambda} \leq C \{ \| W_s \|_{1+\lambda} + \| \Gamma \|_{1+\lambda} \} \quad , \qquad \lambda > 0 . \qquad (3.111)$$

2. Estimación de $\Gamma(w_3, r)$, α y f.

En el siguiente teorema estimamos $\|\phi(w_3,r)\|_\lambda$ con ϕ definido en la introducción de esta sección. La estimación que vamos a obtener permite extender el operador ϕ de $H^{1+\lambda} \times H^{1+\lambda}$ a $H^{1+\lambda} \times H^{\lambda}$, con λ positivo y no entero. Además, demostramos que, en efecto, el operador ϕ puede considerarse como un operador de $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}$ en $\mathcal{B}$.

Observamos previamente que si (w_3, r) es suficientemente próximo a (w_0, r_0) en $H^{2+\varepsilon}(S^2) \times H^{2+\varepsilon}(S^2)$, la hipótesis

$$g_0 \neq 0 \ , \ \left(\frac{\partial(|\nabla v|)}{\partial r} \circ \varphi_{r_0}\right) \neq 0 \qquad \text{sobre } S^2$$

se extiende por continuidad a $|\nabla w_0 \varphi_r|$ y $\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r} \circ \varphi_r$.

Teorema 3.4

Sea $(w_3, r) \in \mathcal{V} \cap \{H^{1+\lambda} \times H^{1+\lambda}\}$. Entonces, se tiene la siguiente estimación

$$\|\phi(w_3,r)\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\}$$

con λ positivo y no entero.

Demostración

De (3.111), se deduce sin dificultad que

$$\|\langle \nabla w_0 \varphi_r, \nabla w_0 \varphi_r \rangle\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\} . \qquad (3.112)$$

Observamos que si $\lambda = 1$ el término de la derecha está uniformemente acotado, es decir, $\exists M < +\infty$ tal que

$$\| |\nabla w_0 \varphi_r|^2 \|_1 \leq M .$$

Puesto que $|\nabla w_0 \varphi_r|^2 > 0$, en virtud del lema A.3 con $G = t^{1/2}$ y $v = \langle \nabla w_0 \varphi_r, \nabla w_0 \varphi_r \rangle$, podemos estimar la λ-norma de $\phi(w_3, r)$ en la forma

$$\|\Phi(w_s,r)\|_\lambda \leq C\{\|w_s\|_\lambda + \|G\|_\lambda + \|G\|_1\|\nu\|_\lambda\} \leq C\{1+\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\} \leq$$

$$\leq C\{\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\}.$$

Estimemos ahora la λ -norma de $[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r]^{-1}$. En la sección 3.1 vimos que

$$\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r = \langle \underline{e}_g , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle$$

y por consiguiente,

$$[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r]^{-1} = |\nabla w\circ\varphi_r|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}.$$

Según el lema A.2 , tenemos

$$\|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{\|\nabla w\circ\varphi_r\|_\lambda\|(M_w\circ\varphi_r)\|_0 + \|\nabla w\circ\varphi_r\|_0\|(M_w\circ\varphi_r)\|_\lambda\}. \quad (3.113)$$

Particularizando (3.110) para $|\alpha| = 2$,

$$\|(M_w\circ\varphi_r)\|_{\lambda-1} \leq C\{\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\} \ , \quad \lambda > 1$$

o equivalentemente

$$\|(M_w\circ\varphi_r)\|_\lambda \leq C\{\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} \ , \quad \lambda > 0 \ . \quad (3.114)$$

Obsérvese que si $\lambda = \varepsilon$, el término de la derecha de (3.114) està uniformemente acotado. Así pues, sustituyendo (3.111) y (3.114) en (3.113), obtenemos

$$\|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\}. \quad (3.115)$$

De nuevo para el miembro de la derecha hay una cota uniforme si $\lambda = \varepsilon$; entonces, según el lema A.3 se tiene

$$\|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\|_\lambda \leq C\{1 + \|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_1^\lambda + \|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} \quad \lambda > 1$$

$$\|\langle\nabla w\circ\varphi_r , (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\|_\lambda \leq C\{1 + \|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} \leq C\{\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} \quad 0 < \lambda \leq 1 .$$

Para $\lambda > 1$, podemos acotar el segundo sumando de la derecha aplicando la propiedad de convexidad logarítmica del lema A.1:

$$\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_1 \leq C\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_\lambda^{1/\lambda}\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_0^{1-1/\lambda} .$$

Por tanto

$$\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_1^\lambda \leq C\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_\lambda\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_0^{\lambda-1} \leq$$
$$\leq C\{\|w_3\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\}$$

y

$$\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} . \qquad (3.116)$$

Combinando la estimación de $|\nabla w\circ\varphi_r|$ -teorema 3.4- y (3.116), obtenemos finalmente

$$\|\left[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r\right]^{-1}\|_\lambda \leq C\{\|\nabla w\circ\varphi_r\|_0\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\|_\lambda +$$
$$+\|\,|\nabla w\circ\varphi_r|\,\|_\lambda\,\|\langle \nabla w\circ\varphi_r, (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle^{-1}\|_0\} \leq C\{\|w_3\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} . \qquad (3.117)$$

Por otra parte, puesto que

$$\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r = \langle \nabla w\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle$$

según (3.111) se tiene

$$\|\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\} . \qquad (3.118)$$

Aplicando el lema A.2 , se comprueba facilmente que una estimación del tipo (3.117) es tambien válida para

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\circ\varphi_r\right)\left[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r\right]^{-1} = \alpha .$$

Además, aplicando el lema A.3 para estimar $|\nabla w\circ\varphi_r|^{-1}$, podemos también obtener

$$\|\underline{e}_3\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\} . \qquad (3.119)$$

Con esta colección de estimaciones parciales, concluimos las siguientes estimaciones de $\underline{\alpha}$ y f dados por (3.11) y (3.12):

$$\|\underline{\alpha}\|_\lambda \leq C\{\|w_3\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\} \qquad (3.120)$$

$$\|f\|_\lambda \leq C\left\{\|\dot{w}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon\left(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\right)\right\}. \qquad (3.121)$$

3. Estimación de $\|\nabla \dot{u} \circ \varphi_r\|_\lambda$.

Para analizar la existencia y solución del problema (3.100) hacemos uso de la proposición 2.7 que sin modificación esencial es válida en nuestro caso con la elección particular $\varphi = \varphi_r$: en efecto, para su demostración (Hörmander, 1976) el único requisito previo es que el problema (3.95) tenga como única solución la trivial como estamos suponiendo. Así pues,

Lema 3.5

Si r es suficientemente próximo a r_0 en $H^{2+\varepsilon}$ y $\dot{u} \in H^{1+\varepsilon}$, $\dot{\underline{a}} = (\dot{a}_j) \in \mathbb{R}^3$ verifican

$$\begin{cases} \Delta \dot{u} = 0 & \text{en } \Omega_r \\ \dot{u} \circ \varphi_r - \langle \underline{\alpha}, \nabla \dot{u} \circ \varphi_r \rangle = f - \sum_j a_j A_j & \text{sobre } S^2 \\ \dot{u} = {}^{\alpha_{\dot{u}}}/_{r} + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases}$$

con $f \in H^\varepsilon(S^2)$, entonces

$$\|\dot{u} \circ \varphi_r\|_{1+\varepsilon} + \sum_j |\dot{a}_j| \leq C\|f\|_\varepsilon .$$

A la vista de este resultado, las mismas conclusiones que sacábamos de la proposición 2.7 son válidas para el problema (3.100), y por tanto, bajo las condiciones expuestas en el lema anterior, el problema (3.100) admite solución única verificando

$$\|\dot{u} \circ \varphi_r\|_{1+\varepsilon} + \sum_j |\dot{a}_j| \leq C\left\{\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon\right\}. \qquad (3.122)$$

Así pues, el operador $\Phi'(w_s, r)$ admite inversa para todo (w_s, r) próximo a (w_0, r_0) en $H^{2+\varepsilon}$.

El siguiente resultado establece la estimación de la $(1+\lambda)$-nor ma de $\nabla \dot{u} \circ \varphi_r$.

Lema 3.6

Sea $\dot{u}$ la (única) solución de (3.100). Entonces,

$$\|\nabla \dot{u} \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|\dot{w}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda + (\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\}$$

con λ positivo y no entero.

Demostración

Consideremos de nuevo el difeomorfismo $\varphi_{\tilde r}$ y la función $\dot{v} = \dot{u} \circ \varphi_{\tilde r}$. Puesto que $\nabla \dot{u} \circ \varphi_r$ es la restricción de $\delta \dot{v} = [J(\varphi_{\tilde r})^T]^{-1} \nabla \dot{v}$ sobre S^2 , la función $\dot{v}$ verifica la condición de contorno,

$$\dot{v} - \langle \underline{\alpha} , [J(\varphi_{\tilde r})^T]^{-1} \nabla \dot{v} \rangle = f - \sum_j \dot{a}_j A_j \qquad \text{sobre } S^2. \tag{3.123}$$

Haciendo uso de la propiedad

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^T v, w \rangle \ , \quad v, w \in \mathbb{R}^n, \ A \in \mathfrak{M}_{n\times n}$$

la condición (3.123) puede también escribirse en la forma

$$\dot{v} - \langle [J(\varphi_{\tilde r})]^{-1} \underline{\alpha} , \nabla \dot{v} \rangle = f - \sum_j \dot{a}_j A_j \qquad \text{sobre } S^2.$$

Además, la función $\dot{v}$ verifica la ecuación de Laplace-Beltrami,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{g}^{1/2} g^{ij} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad \text{en } \mathcal{N}$$

con respecto a la métrica g_{ij} inducida por $\varphi_{\tilde r}$.

Así pues, en virtud del teorema A.5 con $\Omega = \mathcal{N}$, $\Sigma_0 = \Sigma$, $\Sigma_1 = S^2$, $g_0 = u \circ \varphi_{r+1}$, $g_1 = f - \sum_j \dot{a}_j A_j$, $B_j = -\{[J(\varphi_{\tilde r})]^{-1} \underline{\alpha}\}_j$ y $B_0 = 1$, tenemos

$$\|\dot{v}\|_{1+\lambda} \leq C\{\|\dot{u} \circ \varphi_{r+1}\|_{1+\lambda} + \|f - \sum_j \dot{a}_j A_j\|_\lambda + \|\dot{u} \circ \varphi_r\|_0 +$$
$$+ (\|\dot{u} \circ \varphi_{r+1}\|_{1+\varepsilon} + \|f - \sum_j \dot{a}_j A_j\|_\varepsilon + \|\dot{u} \circ \varphi_r\|_0)(1 + \sum_j \|B_j\|_\lambda + \sum_{i,j} \|A_{ij}\|_\lambda)\}. \tag{3.124}$$

Según (3.105) con $\mu = 1+\lambda, 1+\varepsilon$, se tiene

$$\|\dot{u}\circ\varphi_{r+1}\|_{1+\lambda} \leq C\,\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0\,\|r\|_{1+\lambda}$$

$$\|\dot{u}\circ\varphi_{r+1}\|_{1+\varepsilon} \leq C\,\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0\,.$$

Por otra parte, en base a las estimaciones obtenidas previamente para $\underline{\alpha}$, $[J(\varphi_r)]^{-1}$, se obtiene fácilmente

$$\|B_j\|_\lambda \leq C\{\|W_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}\}$$

y por consiguiente (teniendo en cuenta ahora (3.120))

$$\|\dot{v}\|_{1+\lambda} \leq C\Big\{\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0\|r\|_{1+\lambda} + \big[\|\dot{W}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda + (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|\dot{g}_s\|_\varepsilon\big] +$$
$$+\sum_j|\dot{a}_j| + \|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0 + \Big[\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0 + (\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon) + \sum_j|\dot{a}_j|\Big](1+\|W_s\|_{2+\lambda}+\|r\|_{2+\lambda})\Big\}.$$

Si estimamos $\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_0$ por $\|\dot{u}\circ\varphi_r\|_{1+\varepsilon}$ según (3.122), tendremos

$$\|\dot{v}\|_{1+\lambda} \leq C\Big\{(\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)\|r\|_{1+\lambda} + \big[(\|\dot{W}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda) + (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|\dot{g}_s\|_\varepsilon\big] +$$
$$+ (\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon) + (\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(1 + \|r\|_{2+\lambda} + \|W_s\|_{2+\lambda})\Big\} \leq$$
$$\leq C\Big\{(\|\dot{W}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda) + (\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|r\|_{2+\lambda} + \|W_s\|_{2+\lambda})\Big\}.$$

Por último, teniendo en cuenta que $\nabla\dot{u}\circ\varphi_r$ es la restricción de $\delta\dot{v}$ a S^2 , por medio de (3.107) con $\mu=\lambda$ obtenemos

$$\|\nabla\dot{u}\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|\dot{v}\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}\|\dot{v}\|_1\} \leq$$
$$\leq C\Big\{(\|\dot{W}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda) + (\|\dot{W}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|r\|_{2+\lambda} + \|W_s\|_{2+\lambda})\Big\}.$$

4. <u>Estimación de la inversa de la primera diferencial de Φ .</u>

Tenemos el siguiente teorema,

<u>Teorema 3.7</u>

El operador $\Psi(W_s, r)$, con (W_s, r) suficientemente próximo a a $(\tilde{w}_0, r_0)$ en $H^{2+\varepsilon}$, verifica la estimación

$$\|\Psi(\tilde{w}_s, r)(\dot{w}_s, \dot{g}_s)\|_{a+\varepsilon} \leq C\{(\|\dot{w}_s\|_{a+\varepsilon} + \|\dot{g}_s\|_{a+\varepsilon}) + (\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|r\|_{2+a+\varepsilon} + \|\tilde{w}_s\|_{2+a+\varepsilon})\} \tag{3.125}$$

con $a > 0$, $a+\varepsilon \notin \mathbb{Z}$.

<u>Demostración</u>

Consideremos la expresión (3.9). Entonces según el lema A.2 tenemos

$$\|\dot{r}\|_\lambda \leq C\{(\|\dot{g}_s\|_0 + \|\langle \xi_g, \nabla \dot{u}\circ\varphi_r\rangle\|_0)\|[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r]^{-1}\|_\lambda + (\|\dot{g}_s\|_\lambda + \|\langle \xi_g, \nabla \dot{u}\circ\varphi_r\rangle\|_\lambda)\|[\frac{\partial(|\nabla w|)}{\partial r}\circ\varphi_r]^{-1}\|_0\}.$$

Combinando las estimaciones (3.117), (3.119) y la del lema 3.6, la estimación anterior se convierte en

$$\|\dot{r}\|_\lambda \leq C\{\|\dot{g}_s\|_\lambda + (\|\dot{w}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda) + (\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|\tilde{w}_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\}$$

y entonces de (3.14) se tiene

$$\|\Psi(\tilde{w}_s, r)(\dot{w}_s, \dot{g}_s)\|_\lambda \leq C\{(\|\dot{w}_s\|_\lambda + \|\dot{g}_s\|_\lambda) + (\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon)(\|\tilde{w}_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\}$$

con $\lambda > 0$ y no entero.

Si $\lambda < \varepsilon$ la estimación anterior se convierte en

$$\|\Psi(\tilde{w}_s, r)(\dot{w}_s, \dot{g}_s)\|_\lambda \leq C\{\|\dot{w}_s\|_\varepsilon + \|\dot{g}_s\|_\varepsilon\}$$

que no es del tipo deseado (2.44). Así pues, supongamos que $\lambda > \varepsilon$ en cuyo caso, haciendo $a = \lambda - \varepsilon$, la inversa de la primera diferencial verifica (3.125) tal y como queriamos demostrar.

3.4.2 ESTIMACION DE LA SEGUNDA DIFERENCIAL TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

De la definición del operador Φ , observamos que tan solo es necesario analizar la segunda diferencial del operador Γ . El objetivo que perseguimos en este apartado es, según el teorema de Nash-Hörmander, establecer una estimación del tipo (2.45) para la segunda diferencial del operador Φ .

Conviene señalar que la principal diferencia con respecto del problema de Molodensky vectorial, radica en el hecho de que en este caso el operador Γ no es afín lineal en W_s , siendo necesario por tanto estudiar no solo la segunda diferencial con respecto de r (Γ''_{rr})y la segunda diferencial mixta ($\Gamma''_{W_s r}$) sino también la segunda diferencial con respecto de W_s ($\Gamma''_{W_s W_s}$).

(A) SEGUNDA DIFERENCIAL MIXTA

A.1 Fórmula explícita.

Sean $\chi, \Upsilon \in C^{\infty}(S^2, \mathbb{R})$; por definición,

$\Gamma''_{W_s r}(W_s, r) : C^{\infty}(S^2, \mathbb{R}) \times C^{\infty}(S^2, \mathbb{R}) \longrightarrow C^{\infty}(S^2, \mathbb{R})$ bilineal con

$$\Gamma''_{W_s r}(W_s, r)(\chi, \Upsilon) = \frac{d^2}{ds\,dt}\left[\Gamma(W_s + s\chi,\ r + t\Upsilon)\right]_{s=t=0} \tag{3.126}$$

Designemos $\varphi_{r+t\Upsilon}(S^2)$ por $\varphi_t(S^2)$. De la definición de Γ , tenemos

$$\Gamma(W_s + s\chi,\ r + t\Upsilon) = |\nabla W \circ \varphi_t| \tag{3.127}$$

donde W está definido por (1.3) y u es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{fuera de } \varphi_t(S^2) \\ u \circ \varphi_t = W_s + s\chi - \frac{1}{2}\omega^2 (r + t\Upsilon)^2 \operatorname{sen}^2\theta - \sum_j a_j(s,t) A_j & \text{sobre } S^2 \\ u = \alpha/r + O(r^{-3}) & r \to \infty \end{cases} \tag{3.128}$$

Designemos por g_{st} a $|\nabla W \circ \varphi_t|$. Entonces, derivando (3.127) con respecto de t , obtenemos

$$\frac{dg_{st}}{dt} = g_{st}^{-1}\left\{\langle \nabla w\circ\varphi_t , \nabla u_t\circ\varphi_t\rangle + \langle \nabla w\circ\varphi_t , (M_w\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon\right\}$$

con $u_t = \frac{du}{dt}$ es armónica fuera de $\varphi_t(S^2)$, sin armónicos de primer grado en el infinito y tal que (derivando la condición de contorno en (3.128))

$$u_t\circ\varphi_t + \langle \nabla w\circ\varphi_t , \underline{e}_r\rangle \Upsilon = -\sum_j (a_j)_t A_j \qquad \text{sobre } S^2 \tag{3.129}$$

($(a_j)_t$ designa la derivada de a_j con respecto de t .)

Derivando ahora con respecto de s , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g_{st}}{ds\,dt} &= -g_{st}^{-3}\langle \nabla w\circ\varphi_t , \nabla u_s\circ\varphi_t\rangle\left\{\langle \nabla w\circ\varphi_t , \nabla u_t\circ\varphi_t\rangle + \langle \nabla w\circ\varphi_t , (M_w\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon\right\} + \\ &+ g_{st}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}(\langle \nabla w\circ\varphi_t , \nabla u_t\circ\varphi_t\rangle) + \frac{d}{ds}(\langle \nabla w\circ\varphi_t , (M_w\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon)\right\} = \\ &= -g_{st}^{-1}\langle \underline{e}_{g_{st}} , \nabla u_s\circ\varphi_t\rangle\langle \underline{e}_{g_{st}} , \nabla u_t\circ\varphi_t\rangle - g_{st}^{-1}\langle \underline{e}_{g_{st}} , \nabla u_s\circ\varphi_t\rangle\langle \underline{e}_{g_{st}} , (M_w\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon + \\ &+ g_{st}^{-1}\langle \nabla u_s\circ\varphi_t , (M_w\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon + \langle \underline{e}_{g_{st}} , (M_{u_s}\circ\varphi_t)\underline{e}_r\rangle \Upsilon + \\ &+ g_{st}^{-1}\langle \nabla u_s\circ\varphi_t , \nabla u_t\circ\varphi_t\rangle + \langle \underline{e}_{g_{st}} , \nabla u_{st}\circ\varphi_t\rangle\end{aligned} \tag{3.130}$$

donde $\underline{e}_{g_{st}} = g_{st}^{-1}(\nabla w\circ\varphi_t)$, $u_s = du/ds$, $u_{st} = d^2u/ds\,dt$ y M_{u_s} es la matriz de las segundas derivadas de u_s .

Las funciones u_s y u_{st} son armónicas fuera de $\varphi_t(S^2)$, no tienen armónicos esféricos de primer grado en el infinito y sobre S^2 verifican

$$u_s\circ\varphi_t = X - \sum_j (a_j)_s A_j \tag{3.131}$$

$$u_{st}\circ\varphi_t = -\langle \nabla u_s\circ\varphi_t , \underline{e}_r\rangle \Upsilon - \sum_j (a_j)_{st} A_j \tag{3.132}$$

sin más que derivar de nuevo la condición de contorno de (3.128) y (3.129) con respecto de s respectivamente.

Particularizando (3.130) en $s=t=0$, tenemos que la segunda diferencial mixta de Γ es

$$\Gamma''_{w_s r}(w_s,r)(X,\Upsilon) = -g_s^{-1}\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\{\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle + \langle \underline{e}_g, (M_w \circ \varphi_r)\underline{e}_r\rangle \Upsilon\} +$$
$$+ g_s^{-1}\{\langle \nabla u_s \circ \varphi_r, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle + \langle \nabla u_s \circ \varphi_r, (M_w \circ \varphi_r)\underline{e}_r\rangle \Upsilon\} +$$
$$+ \langle \underline{e}_g, \nabla u_{st} \circ \varphi_r\rangle + \langle \underline{e}_g, (M_{u_s} \circ \varphi_r)\underline{e}_r\rangle \Upsilon \ , \ g_s = \Gamma(w_s, r) \tag{3.133}$$

con u_s , u_t y u_{st} armónicas fuera de $\varphi_r(S^2)$ sin componente armónica de primer grado en el infinito y verificando las siguientes condiciones de contorno sobre S^2 :

$$u_s \circ \varphi_r = X - \sum_j (a_j)_s A_j \tag{3.134}$$

$$u_t \circ \varphi_r = -\langle \nabla w \circ \varphi_r, \underline{e}_r\rangle \Upsilon - \sum_j (a_j)_t A_j \tag{3.135}$$

$$u_{st} \circ \varphi_r = -\langle \nabla u_s \circ \varphi_r, \underline{e}_r\rangle \Upsilon - \sum_j (a_j)_{st} A_j . \tag{3.136}$$

A.2 Estimación de $\Gamma''_{w_s r}$.

Iremos analizando poco a poco cada uno de los factores y sumandos que intervienen en (3.133).

(i) Estimemos en primer lugar $\nabla u_s \circ \varphi_r$ y $\nabla u_t \circ \varphi_r$. Sea λ mayor que cero y no entero. De (3.134) tenemos,

$$\|u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|X\|_\lambda + \sum_j |(a_j)_s|\}.$$

Con un razonamiento análogo al realizado en el teorema 3.4, podemos deducir que las "correcciones" $\{(a_j)_s\}$ están acotadas uniformemente por $\|X\|_0$. Entonces

$$\|u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\|X\|_\lambda$$

y según el lema 3.3 obtenemos

$$\|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|X\|_{1+\lambda} + \|X\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{1+\lambda}\}. \tag{3.137}$$

Con el mismo razonamiento, para $u_t \circ \varphi_r$ se tiene

$$\|u_t \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|\langle \nabla w \circ \varphi_r, \underline{e}_r\rangle \Upsilon\|_\lambda + \sum_j |(a_j)_t| \leq$$
$$\leq C\{(\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|\Upsilon\|_0 + \|\Upsilon\|_\lambda\} + \sum_j |(a_j)_t|$$

con

$$|(a_j)_t| \leq \| \langle \nabla w \circ \varphi_r , \underline{e}_r \rangle \mathcal{T} \|_0 \leq C \|\mathcal{T}\|_0 .$$

Luego,

$$\| u_t \circ \varphi_r \|_\lambda \leq C \{ (\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{T}\|_\lambda \} . \qquad (3.138)$$

Aplicando de nuevo el lema 3.3, tenemos finalmente

$$\| \nabla v_t \circ \varphi_r \|_\lambda \leq C \{ (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{T}\|_{1+\lambda} +$$

$$+ [(\|W_s\|_{2+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{2+\varepsilon}) \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{T}\|_{1+\varepsilon}] \|\Gamma\|_{1+\lambda} \} \leq$$

$$\leq C \{ (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{T}\|_{1+\lambda} + \|\mathcal{T}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda} \} . \qquad (3.139)$$

Por lo que respecta a $M_{u_s} \circ \varphi_r$, la siguiente estimación es cierta

$$\| M_{u_s} \circ \varphi_r \|_{\lambda - 1} \leq C \{ \|\bar{X}\|_{1+\lambda} + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda} \} \qquad \lambda > 1$$

o equivalentemente

$$\| M_{u_s} \circ \varphi_r \|_\lambda \leq C \{ \|\bar{X}\|_{2+\lambda} + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{2+\lambda} \} \qquad \lambda > 0 . \qquad (3.140)$$

(ii) Estimemos a continuación la λ-norma de $\nabla u_{st} \circ \varphi_r$.

En este caso, según (3.136),

$$|(a_j)_{st}| \leq \| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \underline{e}_r \rangle \mathcal{T} \|_0 \leq C \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 .$$

Entonces

$$\| v_{st} \circ \varphi_r \|_\lambda \leq \| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \underline{e}_r \rangle \mathcal{T} \|_\lambda + C \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 \leq$$

$$\leq C \{ \|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_0 \|\mathcal{T}\|_\lambda + \|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \|\mathcal{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 \}$$

y teniendo en cuenta la estimación (3.137), obtenemos

$$\| v_{st} \circ \varphi_r \|_\lambda \leq C \{ \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_\lambda + (\|\bar{X}\|_{1+\lambda} + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \|\mathcal{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 \} \leq$$

$$\leq C \{ \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_\lambda + \|\bar{X}\|_{1+\lambda} \|\mathcal{T}\|_0 + \|\Gamma\|_{1+\lambda} \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 \}$$

De nuevo, el lema 3.3 con $|\alpha| = 1$, nos permite escribir

$$\|\nabla u_{st}\circ\varphi_r\|_\lambda \leqslant C\{\|u_{st}\circ\varphi_r\|_{1+\lambda} + \|u_{st}\circ\varphi_r\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{1+\lambda}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{\|\bar{X}\|_{2+\lambda+\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{Y}\|_{2+\lambda+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 +$$

$$+ (\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{Y}\|_{2+2\varepsilon} + \|\Gamma\|_{2+\varepsilon}\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0)\|\Gamma\|_{1+\lambda}\} \leqslant \quad (3.141)$$

$$\leqslant C\{\|\Gamma\|_{2+\lambda}\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 + \|\Gamma\|_{1+\lambda}(\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 +$$

$$+ \|\bar{X}\|_0\|\bar{Y}\|_{2+2\varepsilon}) + \|\bar{X}\|_{2+\lambda+\varepsilon}\|\bar{Y}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{Y}\|_{2+\lambda+\varepsilon}\}.$$

(iii) Aplicando reiteradamente el lema A.2 , estimemos los productos escalares que intervienen en (3.133).

- Según (3.119) y (3.137), se tiene

$$\|\langle \underline{\xi}_g, \nabla u_s\circ\varphi_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{\|\underline{\xi}_g\|_0\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_\lambda + \|\underline{\xi}_g\|_\lambda\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_0\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(\|\bar{X}\|_{1+\lambda} + \|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{1+\lambda}) + (\|\bar{W}_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{\|\bar{X}\|_{1+\lambda} + (\|\bar{W}_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\}.$$

- Según (3.119) y (3.139), se tiene

$$\|\langle \underline{\xi}_g, \nabla u_t\circ\varphi_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{\|\underline{\xi}_g\|_0\|\nabla u_t\circ\varphi_r\|_\lambda + \|\underline{\xi}_g\|_\lambda\|\nabla u_t\circ\varphi_r\|_0\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(\|\bar{W}_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|\bar{Y}\|_0 + \|\bar{Y}\|_{1+\lambda} +$$

$$+ (\|\bar{W}_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|\bar{Y}\|_{1+\varepsilon}\}.$$

- De la estimación (3.114) de $M_w\circ\varphi_r$, se tiene

$$\|\langle \underline{\xi}_g, (M_w\circ\varphi_r)\underline{\xi}_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{\|\underline{\xi}_g\|_\lambda\|M_w\circ\varphi_r\|_0 + \|\underline{\xi}_g\|_0\|M_w\circ\varphi_r\|_\lambda\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{\|\bar{W}_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\}.$$

Entonces

$$\|\langle \underline{\xi}_g, (M_w\circ\varphi_r)\underline{\xi}_r\rangle\bar{Y}\|_\lambda \leqslant C\{\|\bar{Y}\|_\lambda + (\|\bar{W}_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|\bar{Y}\|_0\}.$$

\- Consideremos ahora el producto escalar $\langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \nabla u_t \circ \varphi_r \rangle$. De (3.137) y (3.139), obtenemos

$$\| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \nabla u_t \circ \varphi_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ (\|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} + \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} +$$

$$+ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} [(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{Y}\|_{1+\lambda} + \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda}]\} .$$

Además, según el lema A.4

$$\|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} \leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \}$$

y análogamente, intercambiando los papeles de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$, para $\|\mathcal{Y}\|_{1+\lambda} \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon}$.

Así pues,

$$\| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \nabla u_t \circ \varphi_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_0 +$$

$$+ \|\Gamma\|_{1+\lambda} \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} + (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon+\lambda}) \} .$$

\- Considerando (3.137) y (3.114), tenemos

$$\| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , (M_w \circ \varphi_r) \underline{\rho}_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ \|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_0 \|(M_w \circ \varphi_r) \underline{\rho}_r\|_\lambda + \|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \|(M_w \circ \varphi_r) \underline{\rho}_r\|_0 \} \leq$$

$$\leq C \{ (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{1+\lambda} \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} + \|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} \} \leq$$

$$\leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) + \|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} \} .$$

Entonces,

$$\| \langle \nabla u_s \circ \varphi_r , (M_w \circ \varphi_r) \underline{\rho}_r \rangle \mathcal{Y} \|_\lambda \leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_0 (\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda}) +$$

$$+ (\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon+\lambda}) \} .$$

\- De (3.139), también podemos obtener

$$\| \langle \underline{\rho}_g , \nabla u_{st} \circ \varphi_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_0 \|\Gamma\|_{2+\lambda} + (\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}) ($$

$$(\|\mathcal{X}\|_{2+2\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{2+2\varepsilon}) + (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon+\lambda}) \} .$$

- Finalmente,

$$\| \langle \underline{e}_g , (M_{u_s} \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|r\|_{2+\lambda} + \|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon} (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}) + \\ + \|\mathcal{X}\|_{2+\lambda} \}$$

y

$$\| \langle \underline{e}_g , (M_{u_s} \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle \mathcal{T} \|_\lambda \leq C \{ \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 \|r\|_{2+\lambda} + \|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}) + \\ + (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{T}\|_{2+\varepsilon+\lambda}) \} .$$

Con todas estas estimaciones previas podemos ahora estimar la λ -norma (con $\lambda > 0$ y no entero) de $\Gamma''_{w_s r}(w_s, r)(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. En efecto, aunque algo laborioso, no es difícil demostrar a partir de (3.133) y por medio del lema A.2 la siguiente estimación

$$\| \Gamma''_{w_s r}(w_s, r)(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \|_\lambda \leq C \{ (\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda}) \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 + \\ + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda}) (\|\mathcal{X}\|_{2+2\varepsilon} \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{T}\|_{2+2\varepsilon}) + (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda} \|\mathcal{T}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{T}\|_{2+\varepsilon+\lambda}) \} . \tag{3.142}$$

(B) <u>SEGUNDA DIFERENCIAL CON RESPECTO DE w_s</u>

B.1 <u>Fórmula explícita.</u>

Sean de nuevo $\mathcal{X}$, $\mathcal{T} \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$;análogamente a (3.126), tenemos en este caso

$$\Gamma''_{w_s w_s}(w_s, r)(\mathcal{X}, \mathcal{T}) = \frac{d^2}{ds\,dt} \left[\Gamma(w_s + s\mathcal{X} + t\mathcal{T}, r) \right]_{s=t=0} \tag{3.143}$$

donde

$$\Gamma(w_s + s\mathcal{X} + t\mathcal{T}, r) = |\nabla w \circ \varphi_r|$$

w verificando (1.3) y u solución del problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega_r \\ u \circ \varphi_r = w_s + s\mathcal{X} + t\mathcal{T} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta - \sum_j a_j(s,t) A_j & \text{sobre } S^2 \\ u = \alpha_u / r + O(r^{-3}) & r \to \infty . \end{cases} \tag{3.144}$$

Es claro que en este caso las funciones $a_j(s,t)$ son lineales con respecto a las variables s y t, de tal forma que $(a_j)_{st} = 0$.

Derivando (3.143) con respecto de t, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(|\nabla W\circ\varphi_r|) = \langle \nabla W\circ\varphi_r , \nabla W\circ\varphi_r \rangle^{-1/2} \langle \frac{d}{dt}(\nabla W\circ\varphi_r) , \nabla W\circ\varphi_r \rangle =$$

$$= |\nabla W\circ\varphi_r|^{-1} \langle \nabla u_t\circ\varphi_r , \nabla W\circ\varphi_r \rangle$$

habiendo empleado la misma notación que en (A). En la expresión anterior la función u_t es armónica fuera de $\varphi_r(S^2)$, no tiene componente armónica de primer grado y verifica sobre $\varphi_r(S^2)$

$$u_t\circ\varphi_r = T - \sum_j (a_j)_t A_j \tag{3.145}$$

que se obtiene sin mas que derivar la condición de contorno en (3.144) con respecto de t .

Derivando ahora el resultado obtenido con respecto de s , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds\,dt}(|\nabla W\circ\varphi_r|) &= \frac{d}{ds}(|\nabla W\circ\varphi_r|^{-1}) \langle \nabla u_t\circ\varphi_r , \nabla W\circ\varphi_r \rangle + \\ &+ |\nabla W\circ\varphi_r|^{-1} \langle \nabla u_t\circ\varphi_r , \frac{d}{ds}(\nabla W\circ\varphi_r) \rangle = \\ &= - |\nabla W\circ\varphi_r|^{-3} \langle \nabla u_s\circ\varphi_r , \nabla W\circ\varphi_r \rangle \langle \nabla u_t\circ\varphi_r , \nabla W\circ\varphi_r \rangle + \\ &+ |\nabla W\circ\varphi_r|^{-1} \langle \nabla u_t\circ\varphi_r , \nabla u_s\circ\varphi_r \rangle\end{aligned} \tag{3.146}$$

con u_s armónica fuera de $\varphi_r(S^2)$, sin componente armónica de primer grado en el infinito y verificando sobre $\varphi_r(S^2)$

$$u_s\circ\varphi_r = X - \sum_j (a_j)_s A_j . \tag{3.147}$$

Es necesario señalar, la no presencia en este caso de u_{st} .

Particularizando (3.146) en $s = t = 0$, obtenemos que la segunda diferencial de Γ con respecto de W_s viene dada por

$$\Gamma''_{w_s w_s}(w_s,r)(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = -g_s^{-1}\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle + \tag{3.148}$$

$$+\, g_s^{-1}\langle \nabla u_t \circ \varphi_r\,, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle$$

con u_s y u_t definidas previamente.

B.2 <u>Estimación de $\Gamma''_{w_s w_s}$</u> .

Estimaciones análogás a (3.137) son válidas para $\nabla u_s \circ \varphi_r$ y $\nabla u_t \circ \varphi_r$ con $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente;es decir,

$$\|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \leqslant C\{\|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} + \|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon}\|r\|_{1+\lambda}\}$$

$$\|\nabla u_t \circ \varphi_r\|_\lambda \leqslant C\{\|\mathcal{Y}\|_{1+\lambda} + \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon}\|r\|_{1+\lambda}\}. \qquad \lambda > 0$$

Entonces,

$$\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{(\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} + \|\mathcal{X}\|_{1+\lambda}\}$$

$$\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{(\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} + \|\mathcal{Y}\|_{1+\lambda}\}$$

$$\|\langle \nabla u_t \circ \varphi_r\,, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda \leqslant C\{\|r\|_{1+\lambda}(\|\mathcal{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0\|\mathcal{Y}\|_{2+2\varepsilon}) +$$

$$+ (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0\|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}.$$

A partir de las estimaciones precedentes, y la expresión (3.148), se obtiene

$$\|\Gamma''_{w_s w_s}(w_s,r)(\mathcal{X},\mathcal{Y})\|_\lambda \leqslant C\{\|g_s^{-1}\|_\lambda\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_0\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle\|_0 +$$

$$+ \|g_s^{-1}\|_0\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle\|_0 + \|g_s^{-1}\|_0\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_0\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_t \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda +$$

$$+ \|g_s^{-1}\|_0\|\langle \nabla u_t \circ \varphi_r\,, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_\lambda + \|g_s^{-1}\|_\lambda\|\langle \nabla u_t \circ \varphi_r\,, \nabla u_s \circ \varphi_r\rangle\|_0\} \leqslant$$

$$\leqslant C\{(\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon}\|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} + [\|\mathcal{X}\|_{1+\lambda} + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon}]\|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} +$$

$$+ [\|\mathcal{Y}\|_{1+\lambda} + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon}]\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} +$$

$$+ \|r\|_{1+\lambda}(\|\mathcal{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0\|\mathcal{Y}\|_{2+2\varepsilon}) + (\|\mathcal{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0\|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon+\lambda}) +$$

$$+ (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})(\|\mathcal{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0\|\mathcal{Y}\|_{2+2\varepsilon})\}.$$

con respecto de r :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{rr}''(w_s,r)(X,Y) &= -g_s^{-1}\langle \underline{e}_g, \nabla u_s\circ\varphi_r + (M_w\circ\varphi_r)X\underline{e}_r\rangle\cdot \\
&\cdot\langle \underline{e}_g, \nabla u_t\circ\varphi_r + (M_w\circ\varphi_r)Y\underline{e}_r\rangle + g_s^{-1}\{\langle \nabla u_s\circ\varphi_r + (M_w\circ\varphi_r)X\underline{e}_r, \\
&, \nabla u_t\circ\varphi_r + (M_w\circ\varphi_r)Y\underline{e}_r\rangle\} + \{\langle \underline{e}_g, \nabla u_{st}\circ\varphi_r\rangle + \langle \underline{e}_g, (M_{u_t}\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle X + \\
&+\langle \underline{e}_g, (M_{u_s}\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle Y\} + \langle \underline{e}_g, H\underline{e}_r\rangle XY
\end{aligned}
\qquad (3.151)
$$

donde las funciones u_s , u_t y u_{st} son armónicas fuera de $\varphi_r(S^2)$ sin componente armónica de primer grado en el infinito. Además, derivando la condición de contorno en (3.150) con respecto a s y t y particularizando en cero, obtenemos su comportamiento sobre $\varphi(S^2)$:

$$u_s\circ\varphi_r = -\langle \nabla w\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle X - \sum_j (a_j)_s A_j \qquad (3.152)$$

$$u_t\circ\varphi_r = -\langle \nabla w\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle Y - \sum_j (a_j)_t A_j \qquad (3.153)$$

$$u_{st}\circ\varphi_r = -\langle \nabla u_t\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle X - \langle \nabla u_s\circ\varphi_r, \underline{e}_r\rangle Y - \langle (M_w\circ\varphi_r)\underline{e}_r, \underline{e}_r\rangle XY - \sum_j (a_j)_{st} A_j . \qquad (3.154)$$

C.2 <u>Estimación de Γ_{rr}''</u> .

(i)En modo análogo a como se estimó $\|\nabla u_t\circ\varphi_r\|_\lambda$ al estudiar la segunda diferencial mixta se puede estimar en este caso la λ -norma $\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_\lambda$, $\|\nabla u_t\circ\varphi_r\|_\lambda$, obteniéndose

$$\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|X\|_0 + \|r\|_{1+\lambda}\|X\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{1+\lambda}\}$$

$$\|\nabla u_t\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|Y\|_0 + \|r\|_{1+\lambda}\|Y\|_{1+\varepsilon} + \|Y\|_{1+\lambda}\}.$$

Con estas dos estimaciones tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_s\circ\varphi_r\rangle\|_\lambda &\leq C\{\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_\lambda + \|\underline{e}_g\|_\lambda\|\nabla u_s\circ\varphi_r\|_0\} \leq \\
&\leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|X\|_0 + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|X\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{1+\lambda}\}
\end{aligned}
$$

$$\|\langle \underline{e}_g, \nabla u_t\circ\varphi_r\rangle\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})\|Y\|_0 + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|r\|_{1+\lambda})\|Y\|_{1+\varepsilon} + \|Y\|_{1+\lambda}\}$$

$$\|\langle \nabla u_s \circ \varphi_r \,,\, \nabla u_t \circ \varphi_r \rangle\|_\lambda \leq C\{\|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_0 \|\nabla u_t \circ \varphi_r\|_\lambda + \|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda \|\nabla u_t \circ \varphi_r\|_0\} \leq$$

$$\leq C\{\|X\|_{1+\varepsilon}\,[(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|Y\|_0 + \|Y\|_{1+\lambda} + \|Y\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{1+\lambda}] +$$

$$+ \|Y\|_{1+\varepsilon}[(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|X\|_0 + \|X\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}\|X\|_{1+\varepsilon}]\} \leq$$

$$\leq C\{(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})(\|X\|_{1+\varepsilon}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{1+\varepsilon}) +$$

$$+ \|\Gamma\|_{1+\lambda}(\|X\|_0\|Y\|_{2+2\varepsilon} + \|X\|_{2+2\varepsilon}\|Y\|_0) + (\|X\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}.$$

(ii)Según el lema 3.3 con $|\alpha|=2$, tenemos

$$\|M_{u_s}\circ\varphi_r\|_{\lambda-1} \leq C\{\|u_s\circ\varphi_r\|_{1+\lambda} + \|u_s\circ\varphi_r\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{1+\lambda}\}.$$

Además, según (3.152) y (3.111)

$$\|u_s\circ\varphi_r\|_{1+\lambda} \leq C\{\|\langle\nabla w\circ\varphi_r\,,\,\underline{e}_r\rangle X\|_{1+\lambda} + \sum_j |(a_j)_s|\} \leq$$

$$\leq C\{(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|X\|_0 + \|X\|_{1+\lambda}\}.$$

Entonces, para $\lambda > 0$ y no entero se tiene la siguiente acotación

$$\|M_{u_s}\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{\|u_s\circ\varphi_r\|_{1+\lambda} + \|u_s\circ\varphi_r\|_{1+\varepsilon}\|\Gamma\|_{2+\lambda}\} \leq$$

$$\leq C\{(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|X\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\|X\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{2+\lambda}\}. \qquad (3.155)$$

Análogamente

$$\|M_{u_t}\circ\varphi_r\|_\lambda \leq C\{(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|Y\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\|Y\|_{1+\varepsilon} + \|Y\|_{2+\lambda}\}. \qquad (3.156)$$

Por consiguiente, de (3.119), (3.155) y (3.156) tenemos

$$\|\langle \underline{e}_g\,,(M_{u_s}\circ\varphi_r)\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{(\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})[(\|W_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon})\|X\|_0 +$$

$$+ \|X\|_{2+\varepsilon}] + [\|X\|_0(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}) + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\|X\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{2+\lambda}]\} \leq$$

$$\leq C\{(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|X\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\lambda}\|X\|_{1+\varepsilon} +$$

$$+ (\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|X\|_{2+\varepsilon} + \|X\|_{2+\lambda}\} \qquad (3.157)$$

$$\|\langle \underline{e}_g , (M_{u_t} \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle \|_\lambda \leq C \{ (\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}) \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} +$$
$$+ (\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon} + \|\mathcal{Y}\|_{2+\lambda} \} . \tag{3.158}$$

Se observa que hemos tenido en cuenta la acotación

$$(\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})(\|W_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon}) \leq C \{ \|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda} \} \tag{3.159}$$

la cual se demuestra fácilmente para $\lambda > \varepsilon$ por medio del lema de interpolación A.4 . Si $\lambda < \varepsilon$, las estimaciones (3.157;158) se obtienen casi directamente observando que en este caso $\|\underline{e}_g\|_\lambda$ está uniformemente acotada.

Según el lema A.2 tenemos entonces la siguiente estimación

$$\|\langle \underline{e}_g , (M_{u_t} \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle \mathcal{X} \|_\lambda \leq C \{ (\|W_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}) \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\lambda} \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{X}\|_0 +$$
$$+ (\|W_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \|\mathcal{Y}\|_{2+\varepsilon} \|\mathcal{X}\|_0 + (\|W_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon}) \|\mathcal{Y}_0\| \|\mathcal{X}\|_\lambda + \tag{3.160}$$
$$+ \|\mathcal{Y}\|_{2+\lambda} \|\mathcal{X}\|_0 \} .$$

Una estimación análoga es válida para $\langle \underline{e}_g , (M_{u_s} \circ \varphi_r) \underline{e}_r \rangle \mathcal{Y}$.

(iii)Aplicando de nuevo el lema 3.3 ahora con $|\alpha| = 1$, podemos estimar la λ -norma de $\nabla u_{st} \circ \varphi_r$, obteniendo

$$\|\nabla u_{st} \circ \varphi_r \|_\lambda \leq C \{ \|u_{st} \circ \varphi_r\|_{1+\lambda} + \|u_{st} \circ \varphi_r\|_{1+\varepsilon} \|\Gamma\|_{1+\lambda} \} . \tag{3.161}$$

Puesto que u_{st} verifica la condición de contorno (3.154), si $\mu > 0$ se tiene

$$\|u_{st} \circ \varphi_r \|_\mu \leq C \{ \|\langle \nabla u_t \circ \varphi_t , \underline{e}_r \rangle \mathcal{X} \|_\mu + \|\langle \nabla u_s \circ \varphi_r , \underline{e}_r \rangle \mathcal{Y} \|_\mu + \|\langle (M_w \circ \varphi_r) \underline{e}_r , \underline{e}_r \rangle \mathcal{X} \mathcal{Y} \|_\mu \}$$

y por medio de las estimaciones obtenidas previamente

$$\|u_{st} \circ \varphi_r \|_\mu \leq C \{ (\|W_s\|_{2+\mu} + \|\Gamma\|_{2+\mu}) \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_0 +$$
$$+ \|\Gamma\|_{1+\mu} (\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon}) + \tag{3.162}$$
$$+ (\|\mathcal{X}\|_{1+\varepsilon+\mu} \|\mathcal{Y}\|_0 + \|\mathcal{X}\|_0 \|\mathcal{Y}\|_{1+\varepsilon+\mu}) \}$$

Si $\mu = 1+\varepsilon$, la desigualdad anterior se convierte en

$$\|u_s \circ \varphi_r\|_{1+\varepsilon} \leq C\{(\|w_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon})\|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_0 + \|\Gamma\|_{2+\varepsilon}(\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{1+\varepsilon}) +$$

$$+ (\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+2\varepsilon})\} \leq$$

$$\leq C\{(\|w_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon})\|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_0 + (\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+2\varepsilon})\} .$$

Sustituyendo esta última expresión y (3.162) con $\mu = 1+\lambda$ en (3.161) obtenemos finalmente

$$\|\nabla u_{st} \circ \varphi_r\|_\lambda \leq C\{ (\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_0 +$$

$$+ \|\Gamma\|_{2+\lambda}(\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{1+\varepsilon}) +$$

$$+ \|\Gamma\|_{1+\lambda}(\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+2\varepsilon}) +$$

$$+ (\|\bar{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}$$

habiendo tenido en cuenta (3.159).

Con eśta acotación podemos estimar el producto escalar $\langle \underline{\varrho}_g , \nabla u_{st} \circ \varphi_r \rangle$:

$$\|\langle \underline{\varrho}_g , \nabla u_{st} \circ \varphi_r \rangle\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_0 +$$

$$+ \|\Gamma\|_{2+\lambda}(\|\bar{X}\|_{1+\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{1+\varepsilon}) +$$

$$+ (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})(\|\bar{X}\|_{2+2\varepsilon}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+2\varepsilon}) +$$

$$+ (\|\bar{X}\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|\bar{T}\|_0 + \|\bar{X}\|_0\|\bar{T}\|_{2+\varepsilon+\lambda})\} . \qquad (3.163)$$

- El lema 3.3 con $|\alpha|=3$, nos permite escribir

$$\|H\|_\lambda \leq C\{\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}\}.$$

Entonces

$$\|\langle \underline{e}_g , H\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}) + (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda}) \cdot$$

$$\cdot (\|w_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon})\} \leq C\{\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda}\}$$

y $$\|\langle \underline{e}_g , H\underline{e}_r\rangle X Y\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{3+\lambda} + \|\Gamma\|_{3+\lambda})\|X\|_0\|Y\|_0 +$$

$$+ (\|w_s\|_{3+\varepsilon} + \|\Gamma\|_{3+\varepsilon})(\|X\|_0\|Y\|_\lambda + \|X\|_\lambda\|Y\|_0)\}. \tag{3.164}$$

- De (3.114) se obtiene fácilmente

$$\|(M_w \circ \varphi_r)X\underline{e}_r\|_\lambda \leq C\{\|X\|_\lambda + (\|w_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|X\|_0\} \tag{3.165}$$

$$\|(M_w \circ \varphi_r)Y\underline{e}_r\|_\lambda \leq C\{\|Y\|_\lambda + (\|w_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|Y\|_0\}. \tag{3.166}$$

Según (3.165) y la estimación obtenida anteriormente para $\nabla u_s \circ \varphi_r$, se tiene

$$\|\langle \underline{e}_g , \nabla u_s \circ \varphi_r + (M_w \circ \varphi_r)X\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{\|\nabla u_s \circ \varphi_r\|_\lambda + \|(M_w \circ \varphi_r)X\underline{e}_r\|_\lambda +$$

$$+ (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|X\|_{1+\varepsilon}\} \leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|X\|_0 +$$

$$+ (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|X\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{1+\lambda}\}$$

y reemplazando X por Y ,

$$\|\langle \underline{e}_g , \nabla u_t \circ \varphi_r + (M_w \circ \varphi_r)Y\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})\|Y\|_0 +$$

$$+ (\|w_s\|_{1+\lambda} + \|\Gamma\|_{1+\lambda})\|Y\|_{1+\varepsilon} + \|Y\|_{1+\lambda}\}.$$

Si $\lambda = \varepsilon$, los segundos miembros se pueden acotar por $\|X\|_{1+\varepsilon}$ y $\|Y\|_{1+\varepsilon}$ respectivamente, y por consiguiente

$$\|\langle \underline{e}_g , \nabla u_s \circ \varphi_r + (M_w \circ \varphi_r)X\underline{e}_r\rangle\langle \underline{e}_g , \nabla u_t \circ \varphi_r + (M_w \circ \varphi_r)Y\underline{e}_r\rangle\|_\lambda \leq$$

$$\leq C\{(\|w_s\|_{2+\lambda} + \|\Gamma\|_{2+\lambda})(\|X\|_0\|Y\|_{1+\varepsilon} + \|X\|_{1+\varepsilon}\|Y\|_0) +$$

$$+(\|w_s\|_{1+\lambda}+\|r\|_{1+\lambda})(\|X\|_{2+2\varepsilon}\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_{2+2\varepsilon})+$$

$$+(\|X\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}. \tag{3.167}$$

Estimaciones análogas a (3.167) se verifican tambien para las funciones

$$\langle \nabla u_s\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)X\underline{\xi}_r\,,\,\nabla u_t\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)Y\underline{\xi}_r\rangle$$

$$g_s^{-1}\{-\langle\underline{\xi}_g\,,\nabla u_s\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)X\underline{\xi}_r\rangle\langle\underline{\xi}_g\,,\nabla u_t\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)Y\underline{\xi}_r\rangle+$$

$$+\langle\nabla u_s\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)X\underline{\xi}_r\,,\,\nabla u_t\circ\varphi_r+(M_w\circ\varphi_r)Y\underline{\xi}_r\rangle\}.$$

- Finalmente, sumando las cotas establecidas en (3.160), (3.163), (3.164) y (3.167), si $\lambda > 0$ no es entero tenemos

$$\|\Gamma''_{rr}(w_s,r)(X,Y)\|_\lambda \le C\{(\|w_s\|_{3+\lambda}+\|r\|_{3+\lambda})\|X\|_0\|Y\|_0+$$

$$+(\|w_s\|_{2+\lambda}+\|r\|_{2+\lambda})(\|X\|_{1+\varepsilon}\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_{1+\varepsilon})+$$

$$+(\|w_s\|_{1+\lambda}+\|r\|_{1+\lambda})(\|X\|_{2+2\varepsilon}\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_{2+2\varepsilon})+$$

$$+(\|w_s\|_{3+\varepsilon}+\|r\|_{3+\varepsilon})(\|X\|_\lambda\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_\lambda)+ \tag{3.168}$$

$$+(\|X\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|Y\|_0+\|X\|_0\|Y\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}$$

expresión totalmente análoga a la obtenida en (Hörmander, 1976; 3.3.14) para la segunda diferencial con respecto de r del opera- que define el problema de Molodensky vectorial (cfr. Secc. 2.3).

Apliquemos ahora el lema de interpolación A.4 a fin de simplificar la expresión (3.169). Sean f y g funciones arbitrarias regulares definidas sobre la esfera unidad. Se verifica entonces,

$$\text{(a)}\quad \|f\|_{2+\lambda}\|g\|_{1+\varepsilon}\le C\{\|f\|_{3+\lambda}\|g\|_0+\|f\|_{2+\varepsilon}\|g\|_{2+\varepsilon+\lambda}\} \tag{3.169}$$

$$\text{(b)}\quad \|f\|_{1+\lambda}\|g\|_{2+2\varepsilon}\le C\{\|f\|_{3+\lambda}\|g\|_0+\|f\|_{2+\varepsilon}\|g\|_{2+\varepsilon+\lambda}\} \tag{3.170}$$

si $\quad (1+\varepsilon)(1+\lambda-\varepsilon)\le 2+\lambda+\varepsilon\ ,\ \lambda>\varepsilon\,;$

(c) $\|f\|_{3+\varepsilon}\|g\|_{\lambda} \leq C\{\|f\|_{3+\lambda}\|g\|_{0} + \|f\|_{2+\varepsilon}\|g\|_{2+\varepsilon+\lambda}\}$ (3.171)

si $[(1+\lambda-\varepsilon)\lambda]/(\lambda-\varepsilon) \leq 2+\lambda+\varepsilon$, $\lambda > \varepsilon$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ a determinar. Demostraremos unicamente (a) y (c).

(a) Consideremos el segmento que une los puntos ($3+\lambda$, o) y ($2+\varepsilon$, α). La cuestión está en acotar α de tal modo que (3.169) sea cierto. Si ($2+\lambda$, $1+\varepsilon$) pertenece a dicho segmento, existirá un $t \in (0,1)$ tal que

$$2+\lambda = t(3+\lambda) + (1-t)(2+\varepsilon)$$

$$1+\varepsilon = (1-t)\alpha$$

De la primera ecuación se obtiene

$$t = \frac{\lambda-\varepsilon}{1+(\lambda-\varepsilon)} \in (0,1) \quad \text{si} \quad \lambda > \varepsilon$$

y entonces

$$\alpha = (1+\varepsilon)(1+\lambda-\varepsilon)$$

Por consiguiente, si $\lambda > \varepsilon$, ($2+\lambda$, $1+\varepsilon$) pertenece al segmento $\{(3+\lambda, 0); (2+\varepsilon, (1+\varepsilon)(1+\lambda-\varepsilon))\}$ y según el lema A.4 existirá una constante C tal que

$$\|f\|_{2+\lambda}\|g\|_{1+\varepsilon} \leq C\{\|f\|_{3+\lambda}\|g\|_{0} + \|f\|_{2+\varepsilon}\|g\|_{(1+\varepsilon)(1+\lambda-\varepsilon)}\}$$

verificándose (3.169) siempre y cuando

$$(1+\varepsilon)(1+\lambda-\varepsilon) \leq 2+\varepsilon+\lambda .$$

(c) Consideremos ahora el segmento $\{(3+\lambda, 0); (2+\varepsilon, \alpha)\}$. Entonces,

$$3+\varepsilon = t(3+\lambda) + (1-t)(2+\varepsilon)$$

$$\lambda = (1-t)\alpha$$

De la primera ecuación obtenemos

$$t = \frac{1}{1+\lambda-\varepsilon} \in (0,1) \text{ si } \lambda > \varepsilon$$

y por consiguiente

$$\alpha = \lambda \cdot \frac{(1+\lambda-\varepsilon)}{\lambda-\varepsilon}$$

Aplicando de nuevo el lema A.4 , si

$$\lambda \cdot \frac{(1+\lambda-\varepsilon)}{\lambda-\varepsilon} \leq 2+\varepsilon+\lambda$$

se verifica (3.171).

Las condiciones establecidas previamente pueden reducirse a la única condición

$$2\varepsilon < \lambda < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \varepsilon$$

y si ε es suficientemente pequeño, esta acotación es practicamente cierta para cualquier λ en un intervalo finito.

Teniendo en cuenta la cota uniforme que hemos impuesto sobre $\|W_s\|_{2+\varepsilon}$, $\|r\|_{2+\varepsilon}$, según (3.169;170;171) tendremos con $f = W_s, r$, $g = X, Y$:

$$(\|W_s\|_{2+\lambda} + \|r\|_{2+\lambda})(\|X\|_{1+\varepsilon}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{1+\varepsilon}) \leq C\{(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|r\|_{3+\lambda})\|X\|_0\|Y\|_0 +$$
$$+ (\|X\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}$$

y análogamente para el tercer y cuarto sumando de (3.168).

En definitiva hemos obtenido,

$$\|\Gamma_{rr}^{''}(W_s, r)(X, Y)\|_\lambda \leq C\{(\|W_s\|_{3+\lambda} + \|r\|_{3+\lambda})\|X\|_0\|Y\|_0 +$$
$$+ (\|X\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|Y\|_0 + \|X\|_0\|Y\|_{2+\varepsilon+\lambda})\} \qquad (3.172)$$

siempre y cuando

$$2\varepsilon < \lambda < \varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \lambda \notin \mathbb{Z}$$

Si observamos las expresiones (3.142) y (3.149), podemos establecer finalmente,

$$\|\phi''(w_s,r)(\chi,\gamma)\|_\lambda \leq C\{(\|w_s\|_{3+\lambda}+\|r\|_{3+\lambda})\|\chi\|_0\|\gamma\|_0 +$$

$$+(\|\chi\|_{2+\varepsilon+\lambda}\|\gamma\|_0+\|\chi\|_0\|\gamma\|_{2+\varepsilon+\lambda})\}$$

$$2\varepsilon < \lambda < \varepsilon + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \qquad \lambda \notin \mathbb{Z}$$

o equivalentemente ($a = \lambda - 2\varepsilon$)

$$\|\phi''(w_s,r)(\chi,\gamma)\|_{a+2\varepsilon} \leq C\{(\|w_s\|_{3+a+2\varepsilon}+\|r\|_{3+a+2\varepsilon})\|\chi\|_0\|\gamma\|_0 +$$

$$+(\|\chi\|_{2+a+3\varepsilon}\|\gamma\|_0+\|\chi\|_0\|\gamma\|_{2+a+3\varepsilon})\} \qquad (3.173)$$

con $\quad 0 < a < \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \varepsilon \quad a+2\varepsilon \notin \mathbb{Z}$.

Con esta estimación y la establecida en el teorema 3.7 para la inversa de la primera diferencial, tenemos toda la información necesaria para aplicar el teorema de Nash-Hörmander 2.5, 2.6. Puesto que los resultados obtenidos son análogos a los de Hörmander para el problema de Molodensky vectorial (cfr. Secc. 2.3) la conclusión final es la misma:

<u>Teorema 3.8</u>

Sea $\delta \in (0,1)$ arbitrario.

(a) Para todo w_s , g_s en un $H^{2+\delta}$ entorno de w_0 , g_0 el problema de Molodensky escalar modificado admite una solución r próxima a r_0 en $H^{2+\delta}$ y (a_1 , a_2 , a_3) próximos a cero.

(b) Si w_s , $g_s \in H^a(S^2)$ con $a > 2+\delta$ y no entero, entonces $r \in H^a(S^2)$.

(c) Se puede encontrar un $H^{3+\delta}$ entorno de r_0 que no puede contener dos soluciones diferentes del problema.

<u>Demostración</u>

Análoga a la del teorema 2.8.

REFERENCIAS

Bjerhammar, A. y Svensson, L. (1983) "On the geodetic boundary value problem for a fixed boundary-A satellite approach" Bull. Geod. 57, 382-393.

Bode, A. y Grafarend, E. (1981) "The spacelike Molodenskii problem including the rotational term of the gravity potential" Manuscripta Geodaetica 6, 33-61.

Calderón, A.P. y Zygmund, A. (1957) "Singular integral operators and differential equations" Amer. J. Math. 79, nº4, 901-921.

Dieudonné, J. (1976) Fundamentos de Análisis Moderno Ed. Reverté, Barcelona.

Gilbarg, D. y Trudinger, N.S. (1977) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo. Segunda edición, 1983.

Groten, E. (1979) Geodesy and the Earth's Gravity Field 2 vols., Dümmler, Bonn.

Heck, B. (1983) "On various formulations of the geodetic boundary value problem using the vertical gradient of gravity" Proc. Int. Symp. "Figure of the Earth, the Moon and other Planets", Prague, Monograph Series of VÚGTK.

Heiskanen, W. y Moritz, H. (1985) Geodesia Física IGN-IAG, Madrid. Traducción al español de la versión en inglés "Physical Geodesy", WH Freeman and Company, San Francisco-London, (1967).

Helgason, S. (1962) Differential Geometry and Symmetric Spaces Academic Press, New York.

Holota, P. (1981) "Direct methods for geodetic boundary problems" Proc. 4th Int. Symp. "Geodesy and Physics of the Earth", GDR, Karl-Marx-Stadt.

Holota, P. (1983a) "The Altimetry-Gravimetry boundary value problem I:linearization, Friedrich's inequality" Anno XLII, Boll. di Geod. e Sci. Affini, N.1, 13-32.

Holota, P. (1983b) "The Altimetry-Gravimetry boundary value problem II:weak solution, V-ellipticity" Anno XLII, Boll. di Geod. e Sci. Affini, N.1, 69-84.

Hörmander, L. (1963) Linear Partial Differential Operators Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Hörmander, L. (1976) "The boundary problems of Physical Geodesy" Arch. for Rat. Mech. and Anal., 62, 1-52.

Kantorovich, L.V. y Akilov, G.P. (1964) Functional Analysis in Normed Spaces Macmillan, New York.

Kinderlehrer, D. y Niremberg, L. (1977) "Regularity in free boundary problems" Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser IV, 4, 373-391.

Krarup, T. (1969) "A contribution to the mathematical foundation of Physical Geodesy" Publ. 44, Dan. Geod. Inst., Copenhagen.

Krarup, T. (1973) "Letters on Molodensky's problem I-IV" Manuscrito no publicado.

Mather, R.S. (1978) "The role of the geoid in four-dimensional Geodesy" Marine Geodesy, 1, 217-252.

Mc Owen, R.C. (1981) "Boundary value problems for the laplacian in an exterior domain" Comm. in Part. Diff. Eqs. 6, 783-798.

Mikhlin, S.G. (1965) Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations
Pergamon Press, Oxford.

Moritz, H. (1977) "Recent developments in the geodetic boundary-value problem"
Rep. 266, Dep. of Geod. Sci., Ohio State Univ..

Moritz, H. (1980) Advanced Physical Geodesy
Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.

Moser, J. (1961) "A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations"
Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47, 1824-1831.

Nirenberg, L. (1981) "Variational and topological methods in nonlinear analysis"
Bull. Amer. Math. Soc. vol.4, nº3, 267-302.

Pick, M., Picha, J. y Vyskocil, V. (1973) Theory of the Earth's Gravity Field
Elsevier, Amsterdan.

Sacerdote, F. y Sansò, F. (1983a) "The current position of the linear problem of Molodenskii-Note 1"
Univ. degli studi di Pisa, Dip. di Mat., nº27.

Sacerdote, F. y Sansò, F. (1983b) "The current position of the linear problem of Molodenskii-Note 2"
Univ. degli studi di Pisa, Dip. di Mat., nº28.

Sacerdote, F. y Sansò, F. (1983c) "A contribution to the analysis of the Altimetry-Gravimetry problem"
Bull. Geod. 57, 257-272.

Sacerdote, F. y Sansò, F. (1985) "The true boundary value problem of classical Physical Geodesy"
Proc. "I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy", Roma, 607-616.

Sacerdote, F. y Sansò, F. (1986) "The scalar boundary value problem of Physical Geodesy"
Manuscripta Geodaetica 11, 15-28.

Sansò, F. (1977) "The geodetic boundary value problem in gravity space"
Memorie Accad. Naz. d. Lincei, Ser. VIII, v. XIV, f. 3, 39-97.

Sansò, F. (1978) "The local solvability of Molodensky's problem in gravity space"
Manuscripta Geodaetica 3, 157-227.

Sansò, F. (1979) "The gravity space approach to the geodetic boundary value problem including rotational effects"
Manuscripta Geodaetica 4, 437-449.

Sansò, F. (1981a) "Recent advances in the theory of the geodetic boundary value problem"
Rev. Geophys. and Space Phys., vol. 19, nº3, 437-449.

Sansò, F. (1981b) "The geodetic boundary value problem and the coordinate choice problem"
Bull. Geod. 55, 17-30.

Sansò, F. (1981c) "The point on the simple Molodensky's problem"
Rend. Acc. Naz. dei Lincei-Cl. di Sc. Fis. Mat. e Nat., Serie VIII, vol. LXXI, 87-94.

Sansò, F. (1983) "A discussion on the Altimetry-Gravimetry problems"
Geodesy in Transition.
Eds. Schwarz, K.P. y Lachapelle, G..
Univ. of Calgary, Alberta, Canada, 71-107.

Sansò, F. y Dermanis, A. (1982) "A geodynamic boundary value problem"
Anno XLI, Boll. di Geod. e Sci. Affini, N.1, 66-87.

Schaeffer, D.G. (1975) "The capacitor problem"
Indiana Univ. Math. J., vol. 24, nº12, 1143-1167.

Svensson, L. (1983) "Solution of the Altimetry-Gravimetry problem"
Bull. Geod. 57, 332-353.

Svensson, L. (1985) "Some remarks on the Altimetry-Gravimetry problem"
Proc. "I Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy", Roma, 559-582.

Torge, W. (1983) Geodesia
Ed. Diana, Mexico.

Tscherning, C.C. (1984) "The geodesists's handbook"
Bull. Geod. 58, 309-323.

Witsch, K.J. (1980) "A uniqueness result for the geodetic boundary problem"
J. Diff. Eqs., vol. 38, nº1, 104-125.

Witsch, K.J. (1985) "On a free boundary value problem of Physical Geodesy, I (uniqueness)"
Math. Meth. Appl. Sci., 7, 269-289.

Witsch, K.J. (1986) "On a free boundary value problem of Physical Geodesy, II (existence)"
Math. Meth. Appl. Sci., 8, 1-22

APENDICE

En este apéndice presentamos las propiedades básicas de las normas de Hölder (definidas al comienzo de la sección 2.3), y que han sido utilizadas en este trabajo. Demostraciones completas de estos resultados pueden encontrarse en (Hörmander, 1976; Apéndice A).

Lema A.1 Sea $0 \leq a \leq b$ y b acotado. Entonces existe una constante C tal que

$$|u|_a \leq C\, |u|_b$$

$$|u|_{\lambda a + (1-\lambda) b} \leq C\, |u|_a^{\lambda}\, |u|_b^{1-\lambda} \quad , \quad 0 < \lambda < 1 .$$

Lema A.2 El producto de funciones de clase H^a es tambien de clase H^a ; concretamente, si a es acotado existe una constante C tal que

$$\| u \cdot v \|_a \leq C \left\{ |u|_a |v|_0 + |u|_0 |v|_a \right\} .$$

Sea G una función definida en algún conjunto convexo y compacto $B \subset \mathbb{R}^k$ y $v = (v_1 \ldots v_k)$ una k-upla de funciones definidas en un conjunto convexo y compacto $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$; la composición $G(v_1 \ldots v_k)$ la abreviaremos por $G \circ v$ cuando esta operación sea definible. Entonces, si $rg(v_1 \ldots v_k) \subset B$ se tiene el siguiente resultado

Lema A.3 (a) Si $a \geq 1$ y $G, v \in H^a$, $G \circ v \in H^a$ y además

$$|G \circ v|_a \leq C \left\{ |G|_a |v|_1^a + |G|_1 |v|_a + |G|_0 \right\} .$$

(b) Si $0 \leq a \leq 1$,

$$|G \circ v|_a \leq C \left\{ |G|_a |v|_1^a , |G|_1 |v|_a \right\} + |G|_0 .$$

En cualquier caso, si $|v|_1 \leq M$ y $a > 0$ tenemos

$$|G \circ v|_a \leq C \left\{ |G|_a + |G|_1 |v|_a \right\} .$$

con C dependiendo de M .

El lema A.1 permite establecer el siguiente resultado de interpolación,

Lema A.4 Sean $u \in H^{a_j}$, $v \in H^{b_j}$, $j=1,\dots,J$. Si (a,b) pertenece al casco convexo (convex hull) de $\{(a_j,b_j): j=1,\dots,J\}$, entonces $u \in H^a$, $v \in H^b$ y se tiene la siguiente estimación

$$|u|_a |v|_b \leq C \sum_{j=1}^{J} |u|_{a_j} |v|_{b_j} .$$

Sea ahora Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera C^∞ $\partial\Omega = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, donde Σ_0 y Σ_1 son subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados (uno de los cuales puede ser el vacío). Consideremos el problema de contorno

$$(P) \quad \begin{cases} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g_0 & \text{sobre } \Sigma_0 \\ Bu = \sum_1^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + B_0 u = g_1 & \text{sobre } \Sigma_1 \end{cases}$$

Entonces se tiene la siguiente estimación tipo Schauder para las soluciones regulares de (P),

Teorema A.5 Supongamos que para alguna constante C fija y para algún $\varepsilon > 0$ se verifica

$$C|B_\nu| \geq 1 \ , \quad C \sum_{j,k} A_{jk} \xi_j \xi_k \geq \sum_j \xi_j^2 \ . \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$|B|_{\varepsilon;\Sigma_1} \leq C \ , \quad |A|_{\varepsilon;\Omega} = \sum_{j,k} |A_{jk}|_{\varepsilon;\Omega} \leq C$$

con B_ν componente normal del vector $B = (B_1 \cdots B_n)$. Entonces, si $u \in H^{1+a}(\bar\Omega)$ con $a > 0$ no entero es solución de (P), tenemos

$$|u|_{1+a;\Omega} \leq C(a)\{|g_0|_{1+a;\Sigma_0} + |g_1|_{a;\Sigma_1} + |u|_{0;\Sigma_1} + \\ + (|g_0|_{1+\varepsilon;\Sigma_0} + |g_1|_{\varepsilon;\Sigma_1} + |u|_{0;\Sigma_1})(|B|_{a;\Sigma_1} + |A|_{a;\Omega})\} .$$

Concluimos este apéndice con la definición de dominio de clase $C^{2+\varepsilon}$ ($0<\varepsilon<1$), necesaria en las secciones 2.4 y 3.3.

Definición (Gilbarg y Trudinger, 1977) Un dominio acotado Ω en $\mathbb{R}^n$ y su frontera $\partial\Omega$ son de clase $C^{2+\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$, si en cada punto $x_0\in\partial\Omega$ hay una bola $B=B(x_0)$ centrada en x_0 y una correspondencia uno a uno ψ de B sobre $D\subset\mathbb{R}^n$ tales que

(i) $\psi(B\cap\Omega)\subset\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$

(ii) $\psi(B\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbb{R}^n_+$

(iii) $\psi\in C^{2+\varepsilon}(B)$. $\psi^{-1}\in C^{2+\varepsilon}(D)$.

Observamos que si cada punto de $\partial\Omega$ tiene un entorno en el cual $\partial\Omega$ es el grafo de una función de clase $C^{2+\varepsilon}$ de $n-1$ de las coordenadas $x_1,\ldots\ldots,x_n$, el dominio Ω y $\partial\Omega$ son de clase $C^{2+\varepsilon}$.

Si $\partial\Omega\in C^{2+\varepsilon}$, se dice entonces que $\varphi\in C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$ si

$$\varphi\circ\psi^{-1}\in C^{k+\alpha}(D\cap\partial\mathbb{R}^n_+)$$

para todo $x_0\in\partial\Omega$, con $k+\alpha\leq 2+\varepsilon$, $\alpha\in(0,1)$. Toda función $\varphi\in C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$ ($k\geq 1$) puede extenderse a una función en $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ y, recíprocamente, toda función de clase $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ toma valores sobre $\partial\Omega$ de clase $C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$. Entre las diversas normas equivalentes que se pueden definir en $C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$, una posibilidad es

$$\|\varphi\|_{C^{k+\alpha}(\partial\Omega)} = \inf_{\Phi}\|\Phi\|_{k+\alpha;\bar{\Omega}}$$

donde el ínfimo se toma sobre el conjunto de las extensiones globales Φ . Equipado con esta norma $C^{k+\alpha}(\partial\Omega)$ es de Banach.